REPUBLIQUE TUNISIENNE
MINISTERE DE L'EDUCATION

Mathématiques

4éme année de l'enseignement secondaire

Section Sciences expérimentales
TOME 1

Hikma Smida
Professeur universitaire

Nabil Mziou
Inspecteur

Khadija Kaâniche Ben Messaoud
Inspecteur Principal

Ridha Bouida
Professeur Principal hors classe

Mohamed Sakrani
Professeur Principal

Taoufik Charrada
Inspecteur

Mourad El Arbi
Professeur Principal

Evaluateurs

Néjiba Mhammdi
Inspecteur

Ali Béji Hammas
Inspecteur

Centre National Pédagogique

Remerciements

Les auteurs remercient toutes les personnes qui ont participé à l'élaboration de ce manuel, et en particulier

Madame Néjiba MHAMDI, Messieurs Abdennibi ACHOUR, et Ali Béji HAMMAS pour leurs critiques, leurs conseils pertinents et leurs modifications judicieuses.

Mesdames Imène GHDAMSI et Leila YOUSSEF pour leur contribution et leur disponibilité.

Mesdames Souad TOUNSI, Fatma TANGOUR, Faten BOUKCHINA, Monsieur Imed CHKIR, pour leurs conseils pertinents et leurs remarques judicieuses.

Les membres de l'équipe d'édition du CNP pour leur grande compétence et leur patience.

Les auteurs

Préface

Ce manuel comprend dix chapitres. Chaque chapitre comprend trois rubriques : Cours, QCM-Vrai ou faux et Exercices et problèmes.

*La rubrique **Cours** comprend*
- *des activités visant à permettre aux élèves de développer leur capacité à chercher, à expérimenter, à modéliser, à conjecturer et à démontrer,*
- *les résultats du cours à retenir,*
- *des exercices et problèmes résolus.*

*La rubrique **QCM** vise à permettre à l'élève de faire sa propre évaluation.*
*La rubrique **Vrai ou faux** vise à l'apprentissage progressif des règles logiques.*

*La rubrique **Exercices et problèmes** comprend des exercices et problèmes visant à permettre aux élèves de mobiliser leurs compétences de façon autonome.*

Sommaire

Chapitre 1

Continuité et limites

C’est l’élaboration d’une démonstration précise du théorème des valeurs intermédiaires, qui amena Bolzano (1817) à définir la notion de continuité d’une fonction.
Le théorème des valeurs intermédiaires , qui semble géométriquement évident, a été utilisé sans scrupules par Euler et Gauss.
Bolzano, cependant estime qu’une démonstration précise est nécessaire pour atteindre une plus grande rigueur en Analyse.

(E.Haier et al, L’analyse au fil de l’histoire , 2000).

Chapitre 1

Continuité et limites

I. Rappels

Dans ce paragraphe nous rappelons les principaux théorèmes vus en troisième année.

I.1 Continuité et limite en un réel

Activité 1

Dans chacun des cas suivants déterminer l'ensemble de définition de la fonction f et justifier la continuité de f en tout réel de son ensemble de définition.

$f : x \mapsto 1 - x + x^2$. $\quad f : x \mapsto \left|\dfrac{-5x+1}{x^2+4}\right|$.

$f : x \mapsto x - \dfrac{1}{x-1}$.

$f : x \mapsto \dfrac{1}{(x+1)(x+2)}$. $\quad f : x \mapsto \dfrac{x+1}{x^2+2x+3}$.

- Toute fonction polynôme est continue en tout réel.
- Toute fonction rationnelle est continue en tout réel de son ensemble de définition.
- Les fonctions $x \mapsto \cos x$ et $x \mapsto \sin x$ sont continues en tout réel.

Théorème

Soit f et g deux fonctions définies sur un intervalle ouvert I et a un réel de I.

- Si f et g sont continues en a, alors les fonctions $f+g$ et $f \times g$ sont continues en a.
- Si f est continue en a, alors les fonctions αf $(\alpha \in \mathbb{R})$, $|f|$ et f^n $(n \in \mathbb{N}^*)$ sont continues en a.
- Si f est continue en a et $f(a) \neq 0$, alors les fonctions $\dfrac{1}{f}$ et $\dfrac{1}{f^n}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ sont continues en a.
- Si f et g sont continues en a et $g(a) \neq 0$, alors la fonction $\dfrac{f}{g}$ est continue en a.
- Si f est positive sur I et f est continue en a, alors la fonction $\sqrt{f}$ est continue en a.

Activité 2

Soit la fonction $f : x \mapsto \dfrac{2x^2-4x+2}{|x-1|}$.

1. Vérifier que pour tout réel $x \neq 1$, $f(x) = 2|x-1|$.
2. En déduire $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$.

Théorème

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I, sauf peut-être en un réel a de I.
S'il existe une fonction g définie sur I, continue en a et telle que $g(x) = f(x)$ pour tout $x \neq a$, alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = g(a)$.

Activité 3

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = x + \dfrac{\sin 2x}{x}$.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Montrer que f est prolongeable par continuité en 0 et déterminer son prolongement.

Théorème

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I, sauf en un réel a de I.
Si la fonction f admet une limite finie ℓ lorsque x tend vers a, alors la fonction g définie sur I par $g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq a, \\ \ell & \text{si } x = a. \end{cases}$ est continue en a.

Activité 4

Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{si } x \leq 1, \\ \dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{2x} & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

1. Calculer $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$.
2. La fonction f est-elle continue en 1 ?

Une fonction f définie sur un intervalle ouvert I est continue en un réel a de I, si et seulement si, $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = f(a)$.

Activité 5

Soit la fonction $f : x \mapsto \dfrac{|x+1|}{x+1}$

La fonction f admet-elle une limite en -1 ?

I.2 Continuité sur un intervalle

Activité 6

Soit f la fonction définie sur $[0, \pi]$ par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin 3x}{x} & \text{si } x \in]0, \pi], \\ 3 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Montrer que f est continue sur $[0, \pi]$.

- Une fonction est continue sur un intervalle ouvert I si elle est continue en tout réel de I.
- Une fonction est continue sur un intervalle $[a, b]$ si elle est continue sur $]a, b[$, à droite en a et à gauche en b.

De façon analogue, on définit la continuité de f sur les intervalles $[a, b[$, $]a, b]$, $[a, +\infty[$ et $]-\infty, a]$.

I.3 Opérations sur les limites

Soit L et L′ deux réels.
Les résultats qui suivent concernent les opérations sur les limites en un réel ou à l'infini.

lim f	lim g	lim (f + g)
L	L′	L + L′
L	+∞	+∞
−∞	L′	−∞
+∞	+∞	+∞
−∞	−∞	−∞

lim f	lim g	lim (f × g)
L	L′	L × L′
+∞	L′ > 0	+∞
+∞	L′ < 0	−∞
+∞	+∞	+∞
+∞	−∞	−∞
−∞	−∞	+∞

lim f	lim g	$\lim\left(\frac{f}{g}\right)$
L	L′ ≠ 0	$\frac{L}{L'}$
+∞	L′ > 0	+∞
+∞	L′ < 0	−∞
L	+∞	0
L	−∞	0
L ≠ 0	0	∞ (On applique la règle des signes).

lim f	lim |f|	$\lim\sqrt{\lvert f\rvert}$
L	|L|	$\sqrt{\lvert L\rvert}$
+∞	+∞	+∞
−∞	+∞	+∞

Les règles énoncées dans les tableaux précédents ne s'appliquent pas lorsqu'il s'agit d'étudier

* la limite de la somme de deux fonctions dont l'une tend vers $+\infty$ et l'autre tend vers $-\infty$.
* la limite du produit de deux fonctions dont l'une tend vers l'infini et l'autre tend vers 0.
* la limite du quotient de deux fonctions qui tendent toutes les deux vers l'infini ou toutes les deux vers 0.

Une transformation d'écriture adéquate pourra nous ramener à l'un des théorèmes résumés dans les tableaux ci-dessus.

Théorème

- La limite d'une fonction polynôme à l'infini est la même que celle de son terme de plus haut degré.
- La limite d'une fonction rationnelle à l'infini est la même que celle du quotient des termes de plus haut degré.

Activité 7

Déterminer les limites ci-dessous.

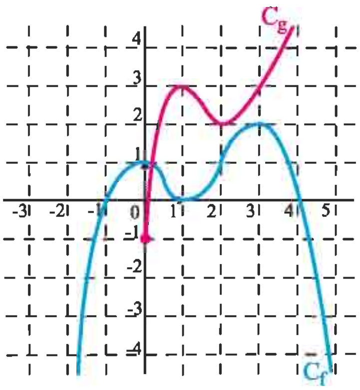
1. $\lim\limits_{x\to-\infty} 2x+\dfrac{1}{x^2+1}$.
2. $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{-5x+1}-3x$.
3. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(-x^2-x\right)^2+\sqrt{2}\,x$.
4. $\lim\limits_{x\to2} \dfrac{1}{|x-2|^3}-\dfrac{1}{|x-2|}$.
5. $\lim\limits_{x\to3} \dfrac{3}{(x-3)^2}-2$.
6. $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{x^3-3x^2+2x}{x^2-1}$.
7. $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x}-x$.

II. Continuité et limite d'une fonction composée

II.1 Composée de deux fonctions

Activité 1

Dans la figure ci-contre C_f et C_g sont les courbes représentatives de deux fonctions f et g définies respectivement sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}_+$.



1. Lire sur le graphique les images par f des réels -1, 0, 1, 2 et 3, ainsi que les images par g des réels 0, 1, 2, et 3.
2. Soit les fonctions $h : x \mapsto g(f(x))$ et $k : x \mapsto f(g(x))$.
   a. Déterminer les images par h des réels -1, 0, 1, 2 et 3.
   b. Déterminer les images par k des réels 0, 1, 2 et 3.

Définition

Soit u une fonction définie sur un ensemble I et v une fonction définie sur un ensemble J tel que $u(I)$ est inclus dans J.

La fonction notée $v \circ u$, définie sur I par $v \circ u(x) = v(u(x))$, est appelée fonction composée de u et v.

Activité 2

Dans chacun des cas suivants, déterminer deux fonctions u et v telles que $f = v \circ u$.

1. $f : x \mapsto \cos(\pi x + 1)$.
2. $f : x \mapsto \dfrac{1 + \cos x}{2 + \cos x}$.
3. $f : x \mapsto \sin\left(\dfrac{x + x^4}{x^2 + 1}\right)$

II. 2 Continuité d'une fonction composée

Théorème (admis)

Soit u une fonction définie sur un intervalle ouvert I contenant un réel a et v une fonction définie sur un intervalle ouvert J contenant le réel $u(a)$.

Si u est continue en a et v est continue en $u(a)$, alors la fonction $v \circ u$ est continue en a.

Corollaire

La composée de deux fonctions continues est continue.

Activité 3

Etudier dans chaque cas la continuité de f sur $\mathbb{R}$.

1. $f : x \mapsto \sin\left(x^2 + \dfrac{\pi}{4}\right)$.
2. $f : x \mapsto \cos(\sin x)$.

II. 3 Limite d'une fonction composée

Théorème (admis)

Soit u et v deux fonctions. Soit a, b et c finis ou infinis.
Si $\lim\limits_{x\to a} u(x) = b$ et $\lim\limits_{x\to b} v(x) = c$ alors $\lim\limits_{x\to a} v\circ u(x) = c$.

Activité 4

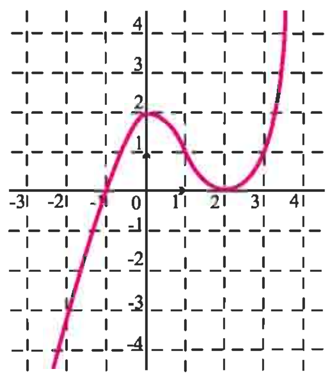
Déterminer dans chaque cas la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers a.

1. $f : x \mapsto \tan\dfrac{x^2}{4}$, $a = \sqrt{\pi}$. 2. $f : x \mapsto \dfrac{\cos x^2 - 1}{x^2}$, $a = 0$. 3. $f : x \mapsto \sin\left(\dfrac{\pi}{x-1}\right)$, $a = 2$.

Activité 5

Dans la figure ci-contre est représentée une fonction f définie sur $\mathbb{R}$.

Déterminer $\lim\limits_{x\to 2} f\left(\dfrac{2}{x}\right)$, $\lim\limits_{x\to 4} f\left(\dfrac{x-4}{x}\right)$ et $\lim\limits_{x\to 0} f(\sin x - 1)$.



Exercice résolu 1

Soit la fonction $f : x \mapsto \cos\left(\dfrac{1}{x^2}\right) - \dfrac{1}{x^2}$.

Déterminer $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$.

Solution

Soit les fonctions $v : x \mapsto \cos x - x$ et $u : x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$ de sorte que $f : x \mapsto (v\circ u)(x)$.

De plus, $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0} \cos x - x = 1$. On en déduit que $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 1$.

Activité 6

Déterminer $\lim\limits_{x\to 1^+} \tan\left(\dfrac{\pi}{2x}\right)$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x}{x-1}\sin\left(\dfrac{\pi x}{2x-1}\right)$.

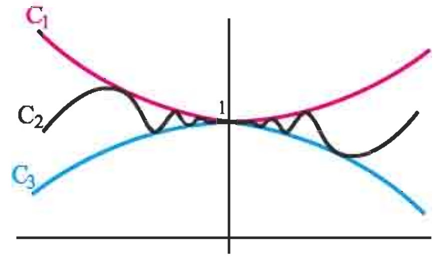
III. Limites et ordre

Activité 1

Soit f, g et h les fonctions définies par $f(x) = x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) + 1$, $g(x) = -x^2 + 1$ et

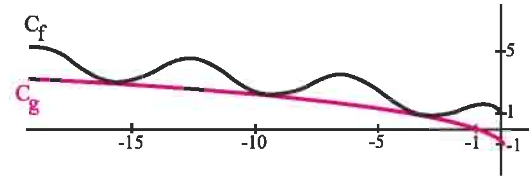
$h(x) = x^2 + 1$.

1. Montrer que pour tout réel non nul x, $g(x) \le f(x) \le h(x)$.



2. Dans la figure ci-contre on a représenté les trois fonctions f, g et h.
   a. Identifier la courbe de chacune de ces fonctions.
   b. Que peut-on conjecturer sur la limite de f(x) lorsque x tend vers 0 ?

Activité 2



Dans la figure ci-contre on a représenté les fonctions f et g définies par $f(x)=\sqrt{-x}+\cos x$ et $g(x)=\sqrt{-x}-1$

1. Etudier la position relative de C_f et C_g.
2. Que peut-on conjecturer sur la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $-\infty$?

Les résultats énoncés ci-dessous permettent de déterminer la limite d'une fonction par comparaison avec les limites d'autres fonctions.

Théorème (admis)

Soit f, u et v trois fonctions définies sur un intervalle I sauf peut-être en un réel a de I. Soit deux réels ℓ et ℓ'.

- Si $u(x)\leq v(x)$ pour tout $x\neq a$ et si $\lim\limits_{a} u=\ell$ et $\lim\limits_{a} v=\ell'$, alors $\ell\leq\ell'$.
- Si $u(x)\leq f(x)\leq v(x)$ pour tout $x\neq a$ et si $\lim\limits_{a} u=\lim\limits_{a} v=\ell$, alors $\lim\limits_{a} f=\ell$.
- Si $v(x)\geq u(x)$ pour tout $x\neq a$ et si $\lim\limits_{a} u=+\infty$, alors $\lim\limits_{a} v=+\infty$.
- Si $v(x)\leq u(x)$ pour tout $x\neq a$ et si $\lim\limits_{a} u=-\infty$, alors $\lim\limits_{a} v=-\infty$.

Les résultats énoncés ci-dessus restent valables lorsque l'on considère des limites à l'infini, à droite en a ou à gauche en a.

Exercice résolu 2

Soit la fonction $f: x\mapsto \dfrac{\cos^2 x+1}{x}$. Déterminer $\lim\limits_{+\infty} f$ et $\lim\limits_{-\infty} f$.

Solution

On sait que $0\leq\cos^2 x\leq 1$, pour tout réel x et alors $1\leq\cos^2 x+1\leq 2$.

Il en résulte que $\dfrac{1}{x}\leq\dfrac{\cos^2 x+1}{x}\leq\dfrac{2}{x}$ pour tout $x>0$

et $\dfrac{2}{x}\leq\dfrac{\cos^2 x+1}{x}\leq\dfrac{1}{x}$ pour tout $x<0$.

De plus, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{x}=0$. On en déduit que $\lim\limits_{+\infty} f=0$.

On montre de même que $\lim\limits_{-\infty} f=0$.

Activité 3

Soit la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2} + \sin^2\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

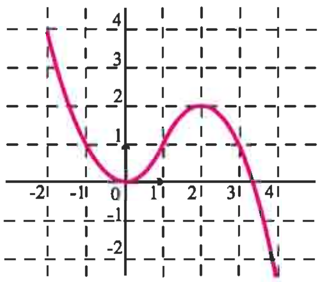
1. Montrer que $f(x) \geq \dfrac{1}{x^2}$, $x \in \mathbb{R}^*$.
2. Etudier la limite de f en 0.

IV. Image d'un intervalle par une fonction continue

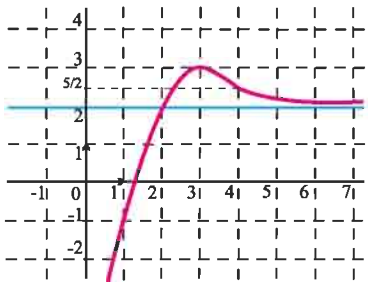
IV. 1 Théorème des valeurs intermédiaires

Activité 1

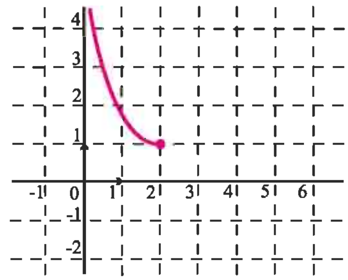
Dans chacun des cas suivants, déterminer graphiquement l'image $f(I)$ de l'intervalle I.



$I =]-1,3[$



$I = [1,4]$

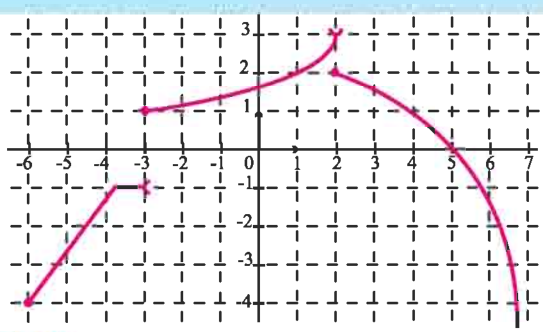


$I =]0,2]$

Théorème (Rappel)

L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

Activité 2

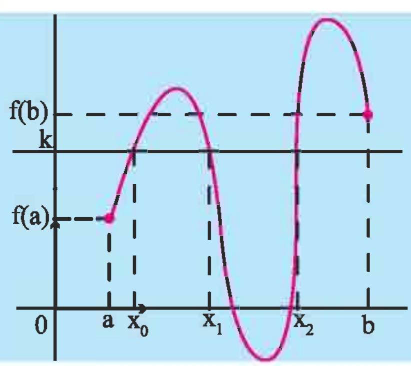


Le graphique ci-contre représente une fonction g définie sur $[-6,+\infty[$.

Déterminer $g([-6,4])$ et $g([-3,5])$.

Théorème des valeurs intermédiaires (Rappel)

Soit f une fonction continue sur un intervalle I.
Soit a et b deux réels de I tels que $a < b$.
Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$ l'équation $f(x) = k$ possède au moins une solution dans l'intervalle $[a,b]$.
En particulier, si $f(a).f(b) < 0$ alors l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans $]a,b[$.



Activité 3

Montrer que les fonctions ci-dessous sont strictement monotones sur I.

$x \mapsto x^2$, $\quad I = \mathbb{R}_+$;

$x \mapsto \dfrac{x+2}{x+1}$, $\quad I =]-1, +\infty[$;

$x \mapsto (1+x)^{20}$, $I = [0, 4]$.

Une fonction f est strictement croissante sur un intervalle I si pour tous réels a et b de I tels que $a < b$, $f(a) < f(b)$.

Une fonction f est strictement décroissante sur un intervalle I si pour tous réels a et b de I tels que $a < b$, $f(a) > f(b)$.

Une fonction est strictement monotone sur un intervalle I, si elle est strictement croissante sur I ou strictement décroissante sur I.

Théorème

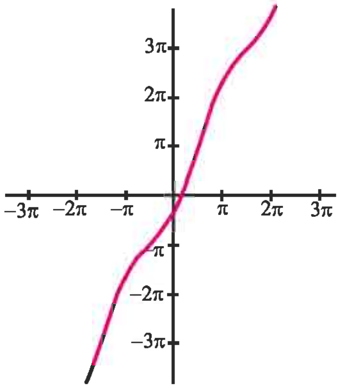
Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I.
Soit a et b deux réels de I tels que $a < b$. Alors pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$ l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution dans $[a, b]$.

Démonstration

Elle découle du théorème des valeurs intermédiaires et de la stricte monotonie de f.

Activité 4

Le graphique ci-contre représente la fonction $f : x \mapsto 2x - \cos x$



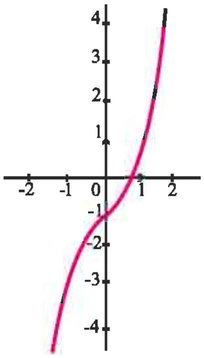
1. Justifier la continuité de f sur $\mathbb{R}$.
2. a. Montrer que f est strictement croissante sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

   b. Montrer que l'équation $f(x) = \dfrac{\pi}{6}$ admet une solution unique α dans $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.
3. a. Lequel des intervalles $\left]0, \dfrac{\pi}{4}\right[$ et $\left]\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ contient la solution α ?

   b. Déterminer un encadrement de α d'amplitude $\dfrac{\pi}{8}$.

Activité 5

La courbe représentée ci-contre est celle de la fonction $f : x \mapsto x^3 + x - 1$.



I. 1. Donner l'ensemble de définition de f.

2. Justifier la continuité de f sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $[0, 1]$.
4. On se propose de trouver un encadrement de plus en plus précis de α, en divisant à chaque fois l'intervalle contenant α en deux intervalles de même amplitude.
(Ce procédé est appelé « méthode de dichotomie »).

a. Calculer $f\left(\frac{1}{2}\right)$ et en déduire que α appartient à l'intervalle $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

b. Calculer $f\left(\frac{3}{4}\right)$ et en déduire que α appartient à l'intervalle $\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right]$.

c. Poursuivre le procédé pour déduire un encadrement de α d'amplitude 10^{-1}.

d. Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

II. Avec l'ordinateur

Pour réaliser la feuille de calcul ci-contre avec le tableur Excel,

- dans les cellules A1, B1, C1, D1, E1 et F1 taper respectivement a, b, $(a+b)/2$, $f(a)$, $f(b)$ et $f((a+b)/2)$;
- dans la cellule A2, taper 0 ; dans la cellule B2, taper 1 (encadrement initial) ;
- dans la cellule C2, taper $\boxed{=(A2+B2)/2}$; dans la cellule D2, taper $\boxed{=\text{PUISSANCE}(A2;3)+A2-1}$ et recopier vers la droite en E2 et F2 ;
- dans la cellule A3, taper $\boxed{=\text{SI}(F2*E2>0;A2;C2)}$ et dans la cellule B3, taper $\boxed{=\text{SI}(F2*E2>0;C2;B2)}$;

	A	B	C	D	E	F
1	a	b	(a+b)/2	f(a)	f(b)	f((a+b)/2)
2	0	1	0,5	-1	1	-0,375
3	0,5	1	0,75	-0,375	1	0,171875
4	0,5	0,75	0,625	-0,375	0,171875	-0,13085938
5	0,625	0,75	0,6875	-0,13085938	0,171875	0,01245117
6	0,625	0,6875	0,65625	-0,13085938	0,01245117	-0,06112671
7	0,65625	0,6875	0,671875	-0,06112671	0,01245117	-0,02482986
8	0,671875	0,6875	0,6796875	-0,02482986	0,01245117	-0,0063138
9	0,6796875	0,6875	0,68359375	-0,0063138	0,01245117	0,00303739
10	0,6796875	0,68359375	0,68164063	-0,0063138	0,00303739	-0,001646
11	0,68164063	0,68359375	0,68261719	-0,001646	0,00303739	0,00069374
12	0,68164063	0,68261719	0,68212891	-0,001646	0,00069374	-0,00047662
13	0,68212891	0,68261719	0,68237305	-0,00047662	0,00069374	0,00010844
14	0,68212891	0,68237305	0,68225098	-0,00047662	0,00010844	-0,00018412

Déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-3}.

Théorème

Soit f une fonction continue sur un intervalle I.
Si la fonction f ne s'annule en aucun point de I alors elle garde un signe constant sur I.

Démonstration

Supposons que f change de signe sur I.

Il existe alors deux réels α et β $(\alpha < \beta)$ de I tels que $f(\alpha).f(\beta) < 0$

La fonction f étant continue sur $[\alpha, \beta]$, l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans $[\alpha, \beta]$. Ce qui contredit l'hypothèse « f ne s'annule en aucun point de I ».

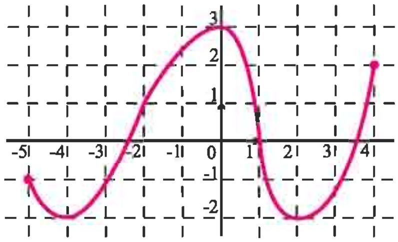
Activité 6

1. Montrer que pour tout $x \neq 1$, $1+x+x^2+x^3+x^4 = \dfrac{x^5-1}{x-1}$.

2. En déduire que la fonction $f : x \mapsto 1+x+x^2+x^3+x^4$ garde un signe constant sur $\mathbb{R}$.

IV. 2 Image d'un intervalle fermé borné par une fonction continue

Activité 7



On a représenté ci-contre la courbe d'une fonction f définie sur $[-5,4]$.

1. Déterminer $f([-5,4])$.

2. a. Déterminer le minimum m et le maximum M de f sur $[-5,4]$.

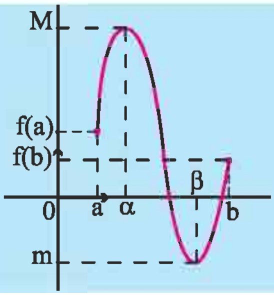
   b. Résoudre graphiquement chacune des équations $f(x)=m$ et $f(x)=M$.

Théorème

L'image d'un intervalle fermé borné $[a,b]$ par une fonction continue est un intervalle fermé borné $[m,M]$.

Le réel m est le minimum de f sur $[a,b]$.

Le réel M est le maximum de f sur $[a,b]$.



Exercice résolu 3

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x^3}{3} + x$.

Déterminer $f([0.6, 1])$, $f([-1, -0.6])$.

Solution

Si $0.6 \leq x \leq 1$ alors $0.216 \leq x^3 \leq 1$. On en déduit que $0.672 \leq f(x) \leq \dfrac{4}{3}$, $0.6 \leq x \leq 1$.

De plus $f(0.6) = 0.672$ et $f(1) = \dfrac{4}{3}$, il vient alors $f([0.6, 1]) = \left[0.672, \dfrac{4}{3}\right]$.

On vérifie facilement que la fonction f est impaire.

Par suite, $f([-1, -0.6]) = \left[-\dfrac{4}{3}, -0.672\right]$.

Activité 8

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\sin^2 x$.

1. Déterminer le minimum et le maximum de f sur $\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right]$.
2. En déduire $f\left(\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right]\right)$.

V. Image d'un intervalle par une fonction strictement monotone

Théorème (admis)

Soit f une fonction définie sur un intervalle de type $[a,b[$ (b fini ou infini).

- Si la fonction f est croissante et majorée alors f possède une limite finie en b.
- Si la fonction f est croissante et non majorée alors f tend vers $+\infty$ en b.
- Si la fonction f est décroissante et minorée alors f possède une limite finie en b.
- Si la fonction f est décroissante et non minorée alors f tend vers $-\infty$ en b.

Activité 1

Soit f une fonction définie et croissante sur $\mathbb{R}_+$ telle que pour tout entier naturel n, $f(n)=n+1$.

1. Soit a un réel positif. Montrer que $f(E(a))\geq a$. ($E(a)$ désigne la partie entière de a).
2. Etudier la limite de f en $+\infty$.

Théorème (admis)

L'image d'un intervalle I par une fonction continue et strictement monotone sur I est un intervalle de même nature.

Exemples

Intervalle I	Si f est strictement croissante sur I	Si f est strictement décroissante sur I
$I=[a,b]$	$f(I)=[f(a),f(b)]$	$f(I)=[f(b),f(a)]$
$I=[a,b[\ (a\in\mathbb{R},\ b\in\mathbb{R})$	$f(I)=[f(a),\lim\limits_{b^-}f[$	$f(I)=]\lim\limits_{b^-}f,f(a)]$
$I=[a,+\infty[\ (a\in\mathbb{R})$	$f(I)=[f(a),\lim\limits_{+\infty}f[$	$f(I)=]\lim\limits_{+\infty}f,f(a)]$
$I=]a,b[\ (a\in\mathbb{R},\ b\in\mathbb{R})$	$f(I)=]\lim\limits_{a^+}f,\lim\limits_{b^-}f[$	$f(I)=]\lim\limits_{b^-}f,\lim\limits_{a^+}f[$

Exercice résolu 4

Déterminer l'image de l'intervalle I par la fonction f dans chacun des cas ci-dessous.

1. $f : x \mapsto x^2 - 2x$, $\quad I =]-\infty,\ 0]$.
2. $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$, $\quad I = [1,\ +\infty[$.
3. $f : x \mapsto \sin x$, $\quad I = \left]0,\ \dfrac{\pi}{2}\right[$.

Solution

1. La fonction $f : x \mapsto x^2 - 2x$ est strictement décroissante sur $]-\infty,\ 0]$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.

Il en résulte que $f\left(]-\infty, 0]\right) = [0, +\infty[$.

2. La fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$ est décroissante sur $[1,\ +\infty[$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

Il en résulte que $f\left([1,\ +\infty[\right) =]0,\ 1]$.

3. La fonction $f : x \mapsto \sin x$ est croissante sur $\left]0,\ \dfrac{\pi}{2}\right[$, $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} f(x) = 1$.

Il en résulte que $f\left(\left]0,\ \dfrac{\pi}{2}\right[\right) =]0,\ 1[$.

QCM

Cocher la réponse exacte.

1. Si $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$ et $g(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right) - f(x)$ alors $\lim\limits_{+\infty} g$ est égale à

☐ $+\infty$. ☐ n'existe pas. ☐ $-\infty$.

2. Si f est une fonction continue et décroissante sur $[2,\ 5]$ et si $f([2,\ 5]) = [1, 3]$ alors

☐ $f(2) = 3$ et $f(5) = 1$. ☐ $f(2) = 1$ et $f(5) = 3$. ☐ $1 < f(2) < 3$.

3. Si f est une fonction continue sur l'intervalle $[-2, 5]$ tel que $f(-2) = 3$ et $f(5) = -2$ alors l'équation $f(x) = -1$

☐ n'admet pas de solution dans $[-2, 5]$. ☐ admet au moins une solution dans $[-2, 5]$. ☐ admet exactement une solution dans $[-2, 5]$.

VRAI - FAUX

Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse.

1. Si f est une fonction paire et si $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.
2. Toute fonction croissante sur $\mathbb{R}$ tend vers $+\infty$ en $+\infty$.
3. Si une fonction admet une limite finie en $-\infty$ et une limite finie en $+\infty$ alors elle est bornée.
4. Si une fonction f n'est pas définie en a alors nécessairement la droite $\Delta : x = a$ est une asymptote verticale à C_f.
5. Soit f, g et h trois fonctions définies sur $\mathbb{R}$, telles que pour tout réel x,

   $g(x) \le f(x) \le h(x)$.

   Si $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 3$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = 5$ alors f admet une limite finie en $+\infty$.

1 Dans chacun des cas suivants, donner l'ensemble de définition de la fonction f et justifier la continuité de f en tout réel de cet ensemble.

$x \mapsto \left|x^2 - x - 3\right|$; $x \mapsto x + 1 + \sqrt{x^2 + 1}$;

$x \mapsto \sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$; $x \mapsto (|x+1| - 2)^5$; $x \mapsto \dfrac{3x^2 - |x|}{x^2 + 4}$;

$x \mapsto \dfrac{1}{\cos^2 x + 1}$; $x \mapsto \dfrac{\cos x - 1}{\sin x - 1}$.

2 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} 2 + \dfrac{1}{x+1} & \text{si } x < -1, \\ 2x^2 + x & \text{si } x \geq -1. \end{cases}$$

1. Tracer la courbe de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
2. Montrer que f est continue sur $]-\infty, -1[$ et sur $]-1, +\infty[$.
3. La fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}$?
4. Déterminer graphiquement le nombre de solutions de chacune des équations ci-dessous.
$f(x) = -3$; $f(x) = -1$; $f(x) = 0.5$; $f(x) = 1$; $f(x) = 4$.

3 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x+2} & \text{si } x \geq -2, \\ \dfrac{2x^2 - |x^3|}{x+2} & \text{si } x < -2. \end{cases}$$

1. Etudier la continuité de f en -2.
2. Etudier la continuité de f sur $]-\infty, -2[$ et sur $[-2, +\infty[$.
3. La fonction f est –elle continue sur $\mathbb{R}$?

4 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 - 1} & \text{si } x \in]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[, \\ \dfrac{1 - x^3}{1 - x^2} & \text{si } -1 < x < 1. \end{cases}$$

1. Etudier la continuité de f à gauche et à droite en -1 .
2. Etudier la continuité de f sur chacun des intervalles $]-\infty, -1]$, $]-1, 1[$ et $[1, +\infty[$.

5 Soit la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x^3 + 3x^2 - 6x - 8}{x - 2}$.

1. Préciser l'ensemble de définition de f.
2. Déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$.
3. La fonction f admet-elle un prolongement par continuité en 2.

6 Dire dans chacun des cas suivants, si la fonction f admet un prolongement par continuité en a.

1. $f : x \mapsto \dfrac{x^2 + |x|}{x^2 - |x|}$, $a = 0$.
2. $f : x \mapsto \dfrac{x^3 + 1}{x^2 - 1}$, $a = -1$.
3. $f : x \mapsto \dfrac{\sin x + 3x}{x}$, $a = 0$.

7 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x(x^2 - x - 2)}{|x|(x-2)} & \text{si } x \neq 2 \text{ et } x \neq 0, \\ 3 \quad \text{si } x = 2, \quad 2 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

1. La fonction f est-elle continue en 0 ?
2. La fonction f est-elle continue en 2 ?

8 Soit la fonction f telle que

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x||x-2|}{x(x^2 - x - 2)} & \text{si } x \neq 2, \\ \dfrac{1}{3} & \text{si } x = 2. \end{cases}$$

1. Donner l'ensemble de définition de la fonction f.
2. Etudier les limites de f en -1 , $+\infty$ et $-\infty$.
3. La fonction f admet-elle un prolongement par continuité en 0 ?

9 Déterminer les limites suivantes.

1. $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{-2}{x-1}$; $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{-2}{x-1}$.

2. $\lim\limits_{x\to -1^+} \dfrac{-2x^3}{x^2-1}$; $\lim\limits_{x\to -1^-} \dfrac{-2x^3}{x^2-1}$.

3. $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{-3}{x^2-3x+2}$; $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{-3}{x^2-3x+2}$.

4. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x}$; $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x}$.

10 Dans chacun des cas suivants, déterminer le prolongement par continuité de la fonction f en x_0.

1. $f : x \mapsto \dfrac{x^3+3x^2-2x-4}{x+1}$, $x_0=-1$.

2. $f : x \mapsto \dfrac{1-\sqrt{2}\cos x}{4x-\pi}$, $x_0=\dfrac{\pi}{4}$.

3. $f : x \mapsto \dfrac{\cos(4x)-1}{x^2}$, $x_0=0$.

11 Dans chacun des cas suivants, étudier la limite de la fonction f.

1. $f : x \mapsto \cos\left(\dfrac{\pi x+1}{x}\right)$ en $-\infty$.

2. $f : x \mapsto \sin\left(\dfrac{3}{\sqrt{x}}\right)$ en $+\infty$.

3. $f : x \mapsto \dfrac{\sin\left(x^2\right)}{x}$ en 0^+.

12 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par

$f(x)=\dfrac{1-\cos x}{x}$.

1. Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

2. Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} f(\sin x)$, $\lim\limits_{x\to 0} f(1-\cos x)$.

13 Dans chacun des cas suivants, à l'aide des théorèmes de comparaison, étudier la limite en 0 de f.

1. $f : x \mapsto x\sin\left(\dfrac{2}{x}\right)$.

2. $f : x \mapsto 1+x^2\sin\left(\dfrac{2}{x}\right)$.

3. $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}+\sin\left(\dfrac{2}{x}\right)$.

14 Dans chacun des cas suivants, à l'aide des théorèmes de comparaison, étudier les limites en $+\infty$ et en $-\infty$ de la fonction f.

1. $f : x \mapsto \dfrac{1+\cos x}{x}$.

2. $f : x \mapsto \dfrac{1+\cos x}{\sqrt{|x|}}$.

3. $f : x \mapsto \dfrac{x+x\cos x}{x^4+x^2+3}$.

15 1. Montrer que pour tout réel x,

$\dfrac{1}{3}\le\dfrac{1}{2-\sin x}\le 1$.

2. En déduire le comportement en $+\infty$ des fonctions $x \mapsto \dfrac{x}{2-\sin x}$ et $x \mapsto \dfrac{x+\sin x}{2-\sin x}$.

16 Soit la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x\cos x}{x^2+1}$.

1. Trouver un réel $M>0$ tel que $|xf(x)|\le M$, pour tout réel x.

2. En déduire le comportement de f en $-\infty$ et $+\infty$.

17 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par

$f(x)=\dfrac{1}{x}\left(2-\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)$.

1. a. Montrer que pour tout $x>0$, $f(x)\ge\dfrac{1}{x}$.

b. En déduire $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$.

2. a. Montrer que pour tout $x<0$, $f(x)\le\dfrac{1}{x}$.

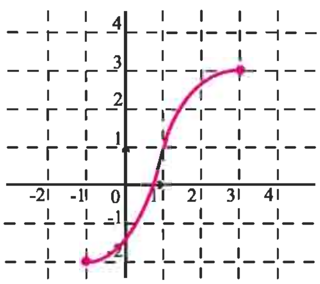
b. En déduire $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$.

18 Dans chacun des cas suivants, déterminer l'image de l'intervalle I par la fonction f.

1. $f: x \mapsto \dfrac{x+1}{x-2}$, $\quad I =]2, +\infty[$.
2. $f: x \mapsto \sqrt{x^2-2x}$, $\quad I =]-\infty, 0]$.
3. $f: x \mapsto \dfrac{1}{\sin x}$, $\quad I = \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.
4. $f: x \mapsto \tan(\pi x)$, $\quad I = \left]-\dfrac{1}{2}, 0\right]$.

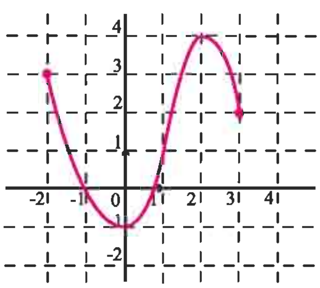
19 Dans chacun des cas ci-dessous donner $f(I)$.

1.



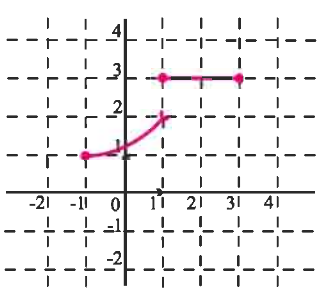
$I = [-1, 3]$

2.



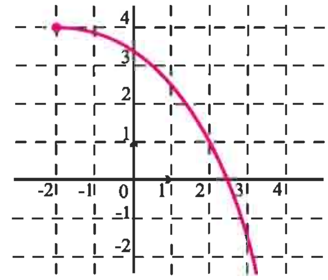
$I = [-2, 3]$

3.



$I = [-1, 3]$

4.



$I = [-2, 2[$

20 Dans chacun des cas suivants, tracer la courbe de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et donner $f(I)$.

1. $f: x \mapsto -x+3$, $\quad I = [1,4]$.
2. $f: x \mapsto \dfrac{1}{x}$, $\quad I =]-\infty, 0[$.
3. $f: x \mapsto x^2+1$, $\quad I =]-1, 2]$.

21 Soit la fonction $f: x \mapsto x^3 + 10x - 1$.

1. Montrer que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
2. a. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution a dans $[0, 1]$.

b. Donner une valeur approchée de a à 10^{-1} près.

22 Soit la fonction $f: x \mapsto x^3 - 2x^2 + x + 1$.

1. Dresser le tableau de variation de f et tracer sa courbe dans un repère orthogonal.
2. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution a dans $[-1, 0]$.
3. Donner une valeur approchée de a à 10^{-1} près.

23 Soit la fonction $f: x \mapsto x^3 - 12x + 1$.

1. Dresser le tableau de variation de f et tracer sa courbe dans un repère orthogonal.
2. Vérifier graphiquement que la courbe de f coupe l'axe des abscisses en trois points M_1, M_2 et M_3 dont les abscisses seront notées x_1, x_2, et x_3, avec $x_1 < x_2 < x_3$.
2. Montrer que x_1 appartient à $]-4, -3[$.

3. Donner pour x_2, et x_3 un encadrement par deux entiers consécutifs.
4. Discuter suivant les valeurs du réel k, le nombre de solutions de l'équation $f(x) = k$.
5. Donner le nombre de solutions de l'équation $|f(x)| = 1$.

24 1. On considère la fonction

$h : x \mapsto \sqrt{x} - \frac{1}{x} - 1$.

a. Montrer que h est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.

b. Déterminer $h(]0, +\infty[)$.

c. Montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet dans $[2, 3]$ une unique solution α.

d. Déterminer une valeur approchée de α à 10^{-1} près.

2. Représenter dans un repère orthogonal, les fonctions f et g définies sur $]0, +\infty[$ par

$f(x) = \sqrt{x}$ et $g(x) = \frac{1}{x} + 1$.

25 On considère la fonction $f : x \mapsto \cos x - x$.

1. Montrer que f est strictement décroissante sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
2. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique a dans $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
3. Donner une valeur approchée de a à 10^{-1} près.

26 Soit f une fonction continue de $[0, 1]$ sur $[0, 1]$.

On pose $g(x) = f(x) - x$.

1. Quel est le signe de $g(0)g(1)$?
2. En déduire que l'équation $f(x) = x$ admet au moins une solution dans $[0,1]$.

Application

Montrer que l'équation $\cos\frac{\pi}{2}x = x$ admet au moins une solution dans $[0, 1]$.

Chapitre 2

Suites réelles

Dans son traité d'Arithmétique, As- Samaw'al (1172) écrit : "Ce que l'on extrait par approximation des racines irrationnelles au moyen du calcul est ce par quoi on veut obtenir une quantité rationnelle proche de la racine irrationnelle. Il peut exister une quantité rationnelle plus proche de la racine irrationnelle que celle-là. Il peut ensuite exister une troisième quantité rationnelle, plus proche de la racine irrationnelle que la deuxième quantité et que la première, car pour toute quantité rationnelle supposée proche d'une racine irrationnelle, la différence entre elles est en vérité une ligne droite, et la ligne est susceptible d'être divisée et d'être partagée, indéfiniment. C'est pourquoi il devient possible de trouver continûment une quantité rationnelle proche de la racine irrationnelle, et de trouver une autre quantité rationnelle plus proche que la première de l'irrationnelle, indéfiniment."

(R. Rashed, Entre Arithmétique et Algèbre , 1984).

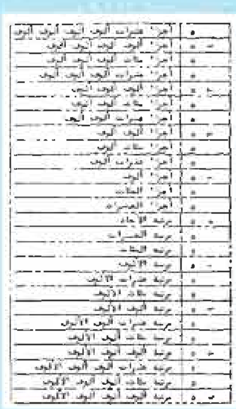


Tableau d'As-Samawal

Chapitre 2

Suites réelles

I. Rappels et compléments sur les limites de suites

Activité 1

Dans chacun des cas ci-dessous, calculer la limite de la suite (u_n).

1. $u_n = \frac{1}{n}, n \geq 1.$ 2. $u_n = n^2 + 1, n \geq 0.$ 3. $u_n = 10^n, n \geq 0.$

Activité 2

On désigne par (u_n) la suite définie par $u_n = \frac{1-(-1)^n}{2n+(-1)^n}, n \geq 1.$

1. Donner l'expression de u_{2n} et u_{2n+1}.
2. Que peut-on dire de la limite de u_n ?

Théorème (admis)

Soit (u_n) une suite réelle et a fini ou infini.

$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = a$, si et seulement si, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_{2n} = a$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_{2n+1} = a$.

Activité 3

Etudier la convergence de la suite (u_n) définie par $u_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}, n \geq 1.$

Activité 4

Soit la suite (u_n) définie pour tout entier n par $u_n = (-1)^n$.

1. Montrer que (u_n) est bornée.
2. La suite (u_n) est-elle convergente ?

Activité 5

Soit la suite (u_n) définie pour tout entier n par $u_n = \frac{n}{2n+2}$.

1. Montrer que la suite (u_n) est convergente.
2. La suite (u_n) est-elle bornée ?

Théorème (admis)

Toute suite convergente est bornée.

Opérations sur les limites de suites

Soit a et b deux réels.
Les résultats qui suivent concernent les opérations sur les limites de suites réelles.

Soit deux suites (u_n) et (v_n) et deux réels a et b.

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	$\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n+v_n)$
a	b	$a+b$
$+\infty$	b	$+\infty$
$-\infty$	b	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	$\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n . v_n)$
a	b	$a\,b$
∞	$b \neq 0$	∞ (on applique la règle des signes)
∞	∞	∞ (on applique la règle des signes)

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	$\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{u_n}{v_n}\right)$
a	$b \neq 0$	$\frac{a}{b}$
∞	b	∞ (on applique la règle des signes)
a	$+\infty$	0
a	$-\infty$	0
$a \neq 0$	0	∞ (on applique la règle des signes)

Activité 6

Dans chacun des cas ci-dessous, calculer la limite de la suite (u_n).

1. $u_n = \dfrac{1}{2-\dfrac{1}{\sqrt{n}}} - 3n^3, \quad n \geq 1.$

2. $u_n = \left(\dfrac{1}{n^2} - \dfrac{1}{2}\right)\left(n^3+3n-1\right), \quad n \geq 1.$

3. $u_n = -\dfrac{1}{n} + \sqrt{\dfrac{5n+3}{2n+9}}, \quad n \geq 1.$

4. $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{4n+1}}\sqrt{n+\dfrac{1}{2}}, \quad n \geq 0.$

II. Suites géométriques et applications

Activité 1

Dans chacun des cas ci-dessous, déterminer la limite de la suite (u_n).

1. $u_n = \left(\dfrac{1}{5}\right)^n, n \geq 0.$
2. $u_n = \left(-\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)^n, n \geq 0.$
3. $u_n = \left(\sqrt{\pi}\right)^n, n \geq 0.$

Théorème (Rappel)

Soit (u_n) une suite géométrique définie par $u_n = q^n$, $n \geq 0$, où q est un réel non nul.

- Si $q > 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
- Si $|q| < 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.
- Si $q \leq -1$, alors la suite (u_n) n'a pas de limite.
- Si $q = 1$, alors la suite (u_n) est constante.

Activité 2

Dans chacun des cas ci-dessous, calculer la limite de la suite (u_n).

1. $u_n = \dfrac{1-\left(-\dfrac{1}{3}\right)^n}{1-n^3}$, $n \geq 2$.

2. $u_n = \dfrac{(-2)^n - 3}{4(-2)^n + 5}$, $n \geq 0$.

3. $u_n = 1 + \dfrac{5}{3} + \ldots + \left(\dfrac{5}{3}\right)^n$, $n \geq 0$.

4. $u_n = -3 - \dfrac{9}{\pi} - \ldots - 3\left(\dfrac{3}{\pi}\right)^n$, $n \geq 0$.

Activité 3

On considère la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = 2, \\ u_{n+1} = 2u_n - 1, n \geq 0. \end{cases}$

1. Déterminer la solution α de l'équation $x = 2x - 1$.
2. On désigne par (v_n) la suite définie par $v_n = u_n - \alpha$, $n \geq 0$.
   Montrer que (v_n) est une suite géométrique.
3. En déduire l'expression de u_n en fonction de n et calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Exercice résolu 1

Soit la fonction $f : x \mapsto 1 + \dfrac{2}{x+1}$.

1. Déterminer les réels x tels que $f(x) = x$.
2. Montrer que pour tous réels x et y différents de -1, $f(x) - f(y) = \dfrac{2(y-x)}{(x+1)(y+1)}$.
3. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$, $n \geq 0$.
   a. Montrer que pour tout entier n, u_n est positif.

b. Représenter la fonction f dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$, ainsi que la droite d'équation $y = x$.

c. Calculer et représenter les réels u_1, u_2 et u_3 sur l'axe $\left(O,\vec{i}\right)$.

4. On pose pour tout entier n, $v_n = \dfrac{u_n - \sqrt{3}}{u_n + \sqrt{3}}$.

a. A l'aide de la question 2, montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme.

b. En déduire l'étude de la convergence de la suite (u_n).

Solution

1. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

Pour déterminer les points fixes de f, il suffit de résoudre l'équation $f(x) = x$.

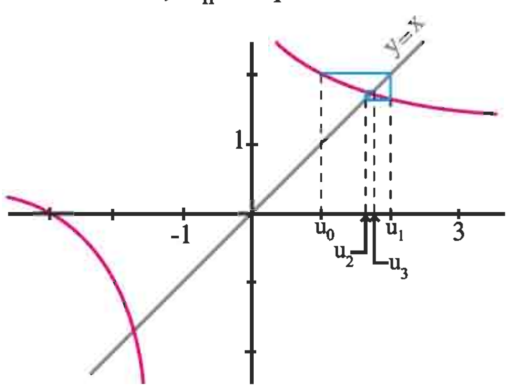
On obtient $f\left(\sqrt{3}\right) = \sqrt{3}$ et $f\left(-\sqrt{3}\right) = -\sqrt{3}$.

2. Pour tous réels x et y différents de -1, on peut écrire $f(x) - f(y) = \dfrac{2}{x+1} - \dfrac{2}{y+1}$,

ou encore que $f(x) - f(y) = \dfrac{2(y-x)}{(x+1)(y+1)}$

3. a. Le réel $u_0 = 1$ est positif. Supposons que u_n est positif. Il en résulte que $u_n + 1$ et $f(u_n)$ sont positifs. Ce qui prouve que pour tout entier n, u_n est positif.

b. On a représenté ci-contre la fonction f dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$, ainsi que la droite d'équation $y = x$.



c. Le calcul donne $u_1 = 2$, $u_2 = \dfrac{5}{3}$ et $u_3 = \dfrac{7}{4}$.

4. a. On peut écrire pour tout entier n,

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - \sqrt{3}}{u_{n+1} + \sqrt{3}} = \frac{f(u_n) - f\left(\sqrt{3}\right)}{f(u_n) - f\left(-\sqrt{3}\right)}.$$

En utilisant la question 2, on obtient $v_{n+1} = \left(\dfrac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}\right)v_n$.

Ce qui prouve que (v_n) est une suite géométrique de raison $\left(\dfrac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}\right)$ et de premier terme $\left(\dfrac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}\right)$.

b. La suite (v_n) converge vers 0 car $\left|\frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}\right|<1$.

On peut écrire pour tout entier n, $u_n=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{3}v_n}{1-v_n}$.

On en déduit que la suite (u_n) converge vers $\sqrt{3}$.

III. Suites du type $v_n=f(u_n)$

Théorème (admis)

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et (u_n) une suite d'éléments de I.

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\ell$ (fini ou infini) et si $\lim\limits_{x\to\ell} f(x)=L$ (fini ou infini), alors $\lim\limits_{n\to+\infty}(f(u_n))=L$.

Activité 1

Dans chacun des cas ci-dessous, calculer la limite de la suite (u_n).

1. $u_n=\sin\left((0.75)^n\right)$, $n\geq 1$.
2. $u_n=n\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)$, $n\geq 1$.
3. $u_n=\cos\left(\frac{\pi n}{2n+1}\right)$, $n\geq 0$.
4. $u_n=\frac{\cos\left(\frac{1}{n}\right)+1}{n}$, $n\geq 1$.

IV. Limites et ordre

Activité 1

On considère la suite (v_n) définie par $v_n=\frac{n+\cos n}{n^2+1}$, $n\geq 1$.

1. Montrer que pour tout $n\geq 1$, $\frac{n-1}{n^2+1}\leq v_n\leq\frac{n+1}{n^2+1}$.
2. Déterminer une valeur approchée à 10^{-5} des réels v_{1000} et v_{10^6}.
3. Que peut-on conjecturer sur $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$?

Activité 2

1. Montrer que pour tout entier $n\geq 4$, $2^n\geq n^2$.
2. En déduire que tout entier $n\geq 4$, $\frac{2^n}{n}\geq n$.
3. Que peut-on conjecturer sur $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{2^n}{n}$?

Nous admettons les résultats ci-dessous qui nous permettent de trouver la limite d'une suite par comparaison avec d'autres suites dont on connaît les limites.

Soit (u_n), (v_n) et (w_n) des suites réelles, a et b deux réels.

Si $u_n \le v_n$, $n \ge N_0$ et si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = b$, alors $a \le b$.

Si $v_n \le u_n \le w_n$, $n \ge N_0$ et si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = a$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$.

Si $0 \le |u_n| \le v_n$, $n \ge N_0$ et si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Si $u_n \le v_n$, $n \ge N_0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.

Si $u_n \le v_n$, $n \ge N_0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

Activité 3

On considère la suite (u_n) définie par $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n} + \cos^2 n}$, $n \ge 0$.

1. Montrer que pour tout $n \ge 1$, $0 \le u_n \le \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.
2. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Activité 4

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier n par $u_n = \dfrac{10^n}{n!}$.

1. Montrer que $0 < \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \le \dfrac{10}{11}$ pour tout entier $n \ge 10$.
2. Montrer alors que $0 < u_n \le \left(\dfrac{10}{11}\right)^{n-10} u_{10}$, $n \ge 10$.

   En déduire que la suite (u_n) est convergente et calculer sa limite.
3. A l'aide de la calculatrice, déterminer un entier naturel n_0 pour que $|u_n| \le 10^{-6}$, $n \ge n_0$.

Activité 5

Dans chacun des cas ci-dessous, calculer la limite de la suite (u_n).

1. $u_n = (3n+1)^n$, $n \ge 1$.
2. $u_n = \dfrac{n^3}{2 + \sin 3n}$, $n \ge 1$.
3. $u_n = n^3(\sin n - 3)$, $n \ge 1$.
4. $u_n = \dfrac{n + \sin^2(2n)}{n^3}$, $n \ge 1$.

Activité 6

1. Ecrire les sommes suivantes en utilisant le symbole $\sum$.

a. $A = 1+2+3+...+n$.

b. $B = -\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+...-\frac{1}{512}$.

2. Calculer les sommes suivantes.

$C = \sum_{k=10}^{500} 1$; $D = \sum_{k=0}^{20} (3k-1)$; $E = \sum_{k=3}^{10} 10^{-k}$.

On note $\sum_{k=1}^{n} a_k$ et on lit «sigma pour k variant de 1 à n des réels a_k» le réel obtenu en faisant la somme des réels $a_1, a_2, ..., a_n$.

On a donc $\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + ... + a_n$.

Activité 7

1. Vérifier que pour tout entier non nul k, $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$.

2. En déduire la limite de la suite (w_n) définie par $w_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$, $n \geq 1$.

V. Convergence des suites monotones

Activité 1

Soit la suite (w_n) définie par $w_n = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + ... + \frac{n}{n^2}$, $n \geq 1$.

1. a. Montrer que $1+2+...+n = \frac{n(n+1)}{2}$, $n \geq 1$.

b. Vérifier que la suite (w_n) est décroissante et minorée.

c. Montrer que (w_n) est convergente et déterminer sa limite.

2. Soit la suite (v_n) définie par $v_n = \frac{1}{n} + \frac{2}{n} + ... + \frac{n}{n}$, $n \geq 1$.

a. Vérifier que la suite (v_n) est croissante.

b. La suite (v_n) est-elle convergente ?

Théorème (admis)

Soit (u_n) une suite définie pour $n \geq 0$.

Si la suite (u_n) est croissante et majorée, alors elle converge vers un réel a

et pour tout $n \geq 0,\ u_n \leq a$.

Si la suite (u_n) est croissante et non majorée alors elle tend vers $+\infty$.

Si la suite (u_n) est décroissante et minorée, alors elle converge vers un réel b

et pour tout $n \geq 0,\ u_n \geq b$.

Si la suite (u_n) est décroissante et non minorée alors elle tend vers $-\infty$.

Activité 2

On considère la suite (u_n) définie par $u_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n}},\ n \geq 1$.

1. Montrer que la suite (u_n) est croissante.
2. Montrer que pour tout $n \geq 1,\ u_n \geq \sqrt{n}$.
3. En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.
4. Montrer alors que la suite (u_n) est non majorée.

VI. Suites récurrentes

Activité 1

On considère la suite (u_n) telle que pour tout $n \geq 1,\ u_{n+1} = u_n(u_n - 1)$.

Pour chacun des cas suivants, à l'aide d'un tableur, calculer les dix milles premiers termes de la suite (u_n) puis conjecturer sa limite.

• $u_1 = 0$ • $u_1 = 2$ • $u_1 = 1$ • $u_1 = -1$ • $u_1 = 0.5$ • $u_1 = 4$.

Théorème

Soit une suite (u_n) vérifiant la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n),\ n \geq 0$ où f est une fonction.

Si la suite (u_n) est convergente vers un réel a et si la fonction f est continue en a alors $a = f(a)$.

Démonstration

Il est clair que si la suite (u_n) converge vers un réel a, alors la suite (u_{n+1}) converge aussi vers a.

De plus, f étant continue en a, alors $(f(u_n))$ tend vers $f(a)$.

Comme $u_{n+1} = f(u_n)$, $n \geq 0$, et par unicité de la limite il vient alors que $a = f(a)$.

Activité 2

Soit la suite (a_n) définie par $a_0 = 1$ et $a_{n+1} = \sqrt{a_n + 1}$, $n \geq 0$.

1. Montrer que la suite (a_n) est croissante et majorée par 2.
2. Déterminer sa limite.

Activité 3

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 0.25$ et $u_{n+1} = u_n(1 - u_n)$, $n \geq 0$.

1. Montrer que la suite (u_n) est décroissante.
2. Montrer que pour tout $n \geq 0$, $0 \leq u_n \leq 1$.
3. Déterminer la limite de (u_n).

VII. Suites adjacentes

Définition et théorème

Deux suites $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ sont adjacentes lorsqu'elles vérifient les conditions

- pour tout $n \geq 0$, $u_n \leq v_n$,
- la suite (u_n) est croissante et la suite (v_n) est décroissante,
- la suite $(v_n - u_n)$ converge vers 0.

Dans ce cas les suites (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite.

Démonstration

La suite (v_n) étant décroissante, il vient que $u_n \leq v_n \leq v_0$, $n \geq 0$.

On en déduit que la suite (u_n) est majorée par v_0. De plus elle est croissante, on en déduit qu'elle converge vers un réel a.

De même la suite (v_n) est décroissante et minorée par u_0.

Donc la suite (v_n) converge vers un réel b.

En écrivant $v_n = (v_n - u_n) + u_n$, $n \geq 0$, et en passant à la limite, on obtient $b = a$.

Ainsi les suites (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite.

Exercice résolu 2

Soit la suite (u_n) définie par $u_n = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$, $n \geq 1$.

1. Montrer que la suite (u_{2n}) est croissante et que la suite (u_{2n+1}) est décroissante.
2. Comparer u_{2n} et u_{2n+1}, pour tout entier $n \geq 1$ et calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_{2n} - u_{2n+1})$.
3. Montrer que la suite (u_n) est convergente vers un réel α.
4. a. Vérifier que $u_{2n} \leq \alpha \leq u_{2n+1}$.

   b. Calculer u_4 et u_5 et donner une valeur approchée de α à 10^{-3} près.

Solution

1. Pour tout entier $n \geq 1$,

$$u_{2n+2} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{(-1)^{2n+1}}{\sqrt{2n}} + \frac{(-1)^{2n+2}}{\sqrt{2n+1}} + \frac{(-1)^{2n+3}}{\sqrt{2n+2}} = u_{2n} + \frac{1}{\sqrt{2n+1}} - \frac{1}{\sqrt{2n+2}}.$$

L'inégalité $\frac{1}{\sqrt{2n+1}} > \frac{1}{\sqrt{2n+2}}$ implique que $u_{2(n+1)} > u_{2n}$, ou encore que la suite (u_{2n}) est croissante.

De même, $u_{2n+3} = u_{2n+1} - \frac{1}{\sqrt{2n+2}} + \frac{1}{\sqrt{2n+3}}$, $n \geq 0$.

L'inégalité $\frac{1}{\sqrt{2n+3}} < \frac{1}{\sqrt{2n+2}}$ implique que $u_{2n+3} < u_{2n+1}$, ou encore que la suite (u_{2n+1}) est décroissante.

2. On peut écrire $u_{2n+1} = u_{2n} + \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$, $n \geq 1$. On en déduit que $u_{2n} < u_{2n+1}$, $n \geq 1$.

L'égalité $u_{2n+1} = u_{2n} + \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$ implique que $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_{2n} - u_{2n+1}) = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{-1}{\sqrt{2n+1}} = 0$.

3. On déduit des questions précédentes que les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont adjacentes.
Par suite, elles convergent vers la même limite α.
La convergence de la suite (u_n) vers α découle de la convergence de chacune des suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) vers α.

4. a. Le théorème relatif aux limites des suites monotones, nous permet d'affirmer que $u_{2n} \leq \alpha \leq u_{2n+1}$, pour tout entier $n \geq 1$.

b. Le calcul donne $\alpha \simeq 0.817$.

QCM

Cocher la réponse exacte.

1. Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = \dfrac{n^2+2}{n}$.

☐ (u_n) est bornée. ☐ $u_n \geq n$, pour tout n de $\mathbb{N}^*$. ☐ (u_n) est majorée par 1.

2. On donne $u_n = \dfrac{n+\cos n}{n+1}$.

☐ $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0.$ ☐ $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -1.$ ☐ $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1.$

3. Soit u la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = n\sin\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

☐ $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0.$ ☐ $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty.$ ☐ $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1.$

VRAI - FAUX

Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse.

1. Si (u_n) prend un nombre fini de valeurs alors (u_n) est convergente.
2. Soit (u_n) et (v_n) deux suites réelles.

   a. Si (u_n) et (v_n) sont convergentes alors (u_n+v_n) est convergente.

   b. Si (u_n+v_n) est convergente alors (u_n) et (v_n) sont convergentes.
3. Si la suite $(u_n{}^2)$ converge vers L, alors on peut affirmer que la suite (u_n) converge vers $\sqrt{L}$ ou vers $-\sqrt{L}$.
4. Soit (u_n) et (v_n) deux suites réelles telles que $\lim\limits_{+\infty} u_n = \lim\limits_{+\infty} v_n$ alors (u_n) et (v_n) sont adjacentes.
5. Soit (u_n) une suite réelle telle que (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont convergentes alors (u_n) est convergente.

1 Etudier la limite de chacune des suites ci-dessous.

$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3n-1}{n+2}$; $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n-1}{3n+2}$; $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^2-n+2}$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} n^3-2n^2+1$; $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3n-1}{|-n+2|}$;

$\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{\dfrac{n^2+1}{|-n-1|}}$; $\lim\limits_{n\to+\infty} \sin\left(\dfrac{1}{n}\right)$; $\lim\limits_{n\to+\infty} \cos\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

2 On considère la suite (a_n) définie par

$a_n = \dfrac{n\left(1+(-1)^n\right)}{n^2+1}$, $n \geq 0$.

1. Déterminer a_{2n} et a_{2n+1}.
2. En déduire que la suite (a_n) est convergente et calculer sa limite.

3 On considère la suite (a_n) définie par

$a_n = \dfrac{n\left(1+(-1)^n\right)}{n+1}$, $n \geq 0$.

1. Déterminer a_{2n} et a_{2n+1}.
2. La suite (a_n) est-elle convergente ?

4 Etudier la limite de chacune des suites ci-dessous.

$\lim\limits_{n\to+\infty} 2+\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$; $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{3+2^n}$; $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2^n}{2^n+1}$.

5 On considère la suite (u_n) définie par

$u_n = \dfrac{2^n}{(-5)^{n+1}}$, $n \geq 0$.

Montrer que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

6 Déterminer, dans chacun des cas, la limite de la suite (u_n).

$u_n = \sin n + n$, $n \geq 0$; $u_n = \dfrac{1}{n}\left(\sin n + \left(\dfrac{1}{2}\right)^n\right)$, $n \geq 1$.

$u_n = -1 + \dfrac{1}{n^2}(\cos n + n)$, $n \geq 1$.

7 1. On considère la suite (u_n) définie par

$u_n = \left(1-\dfrac{1}{2}\right)\left(1-\dfrac{1}{3}\right)\dots\left(1-\dfrac{1}{n}\right)$, $n \geq 1$.

Montrer que $u_n = \dfrac{1}{n}$, $n \geq 1$. En déduire sa limite.

2. Déterminer la limite de la suite (v_n) définie par

$v_n = \left(1+\dfrac{1}{2}\right)\left(1+\dfrac{1}{3}\right)\dots\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$, $n \geq 1$

8 On considère la suite (u_n) définie par

$u_n = \left(\dfrac{2}{n}\right)^n$, $n \geq 1$.

1. Montrer que pour $n \geq 4$, $u_n \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.
2. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

9 On considère la suite (w_n) définie par

$w_n = \dfrac{n!}{3^n}$, $n \geq 0$.

1. Montrer que $\dfrac{w_{n+1}}{w_n} \geq \dfrac{4}{3}$, $n \geq 3$.
2. En déduire que $w_n \geq \left(\dfrac{4}{3}\right)^{n-3} w_3$, $n \geq 3$.
3. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n$.

10 On considère la suite (u_n) définie par

$u_n = \frac{n}{3^n}$, $n \geq 0$.

1. a. Placer dans un repère orthogonal les points $A_i(i, u_i)$, $i \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

b. Montrer que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{2}{3}$, $n \geq 1$.

c. En déduire que $u_n \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$, $n \geq 0$.

d. Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

2. On pose $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$, $n \geq 0$.

a. Montrer que $S_n \leq 2$.

b. En déduire que la suite (S_n) est convergente.

11 Soit un réel $a > 0$ et (b_n) la suite définie pour tout entier non nul n par $b_n = \frac{n}{(1+a)^n}$.

1. Montrer, en utilisant la formule du binôme que $(1+a)^n \geq \frac{n(n-1)a^2}{2}$.

2. En déduire la limite de (b_n).

3. Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite géométrique de raison q telle que $0 < q < 1$.

Montrer qu'il existe un réel $a > 0$ tel que $q = \frac{1}{1+a}$.

Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} n|x_n| = 0$. En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} nx_n$.

4. Calculer les limite suivantes

$\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{n}{2^{n-1}}$; $\lim\limits_{n \to +\infty} n\left(\frac{1}{3}\right)^{n+2}$;

$\lim\limits_{n \to +\infty} (n+1)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$.

12 Soit (u_n) la suite définie par

$$\begin{cases} u_1 = 1, \\ u_{n+1} = \sqrt{3u_n}, \ n \geq 1. \end{cases}$$

1. Montrer que pour tout entier $n \geq 1, 0 \leq u_n \leq 3$.

2. Montrer que la suite (u_n) est croissante.

3. En déduire que la suite (u_n) est convergente et calculer sa limite.

13 Soit la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par

$f(x) = 1 + \frac{1}{x}$.

1. Etudier les variations de f et déterminer $f(]0,+\infty[)$.

2. Représenter la fonction f dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, ainsi que la droite d'équation $y = x$.

3. On note $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, montrer que $f(\varphi) = \varphi$.

4. On se propose de construire une suite (x_n) de rationnels qui converge vers φ.

On pose $x_0 = 2$ et $x_{n+1} = f(x_n)$, $n \geq 0$.

a. Calculer et représenter les réels x_1, x_2, x_3 et x_4.

b. Montrer que pour tout entier n, x_n est un rationnel positif.

c. Montrer que $|x_{n+1} - \varphi| \leq \frac{4}{9}|x_n - \varphi|$.

d. Conclure.

14 Soit (u_n) la suite définie par

$u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$, $n \geq 1$.

1. a. Calculer u_1, u_2 et u_3.

b. Montrer que (u_n) est croissante.

2. a. Vérifier que pour tout entier naturel $k \geq 2$, on a $\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$.

b. En déduire que pour tout entier $n \geq 2$, $u_n \leq 2 - \frac{1}{n}$.

c. En déduire que la suite (u_n) converge vers un réel ℓ et que $\frac{49}{36} \leq \ell \leq 2$.

15 Soit la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=\frac{4x-3}{x}$.

1. Etudier les variations de f et tracer sa courbe dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

Soit la suite (u_n) telle que

$$\begin{cases} u_0 \in]0,+\infty[, \\ u_{n+1}=\frac{4u_n-3}{u_n}, \ n\geq 0. \end{cases}$$

2. On suppose que $u_0=\frac{3}{4}$.

a. Calculer u_1 et représenter u_0 et u_1.

b. La suite (u_n) est-elle définie ?

3. On suppose que $u_0=3$.

a. Représenter u_1, u_2 et u_3.

b. Montrer que la suite (u_n) est constante.

4. On suppose que $u_0=5$.

a. Représenter u_0, u_1, u_2 et u_3.

b. Montrer que la suite (u_n) est décroissante et que pour tout $n\geq 1, u_n\geq 3$.

c. En déduire que la suite (u_n) converge vers un réel α que l'on déterminera.

d. A l'aide d'une calculatrice, déterminer n_0 pour que $u_n-\alpha\leq 10^{-5}, n\geq n_0$.

16 On considère la suite (u_n) définie par

$$\begin{cases} u_1=5, \\ u_{n+1}=5-\frac{6}{u_n}, \ n\geq 1. \end{cases}$$

1. Calculer u_2 et u_3.

2. Montrer que pour tout $n\geq 0$,

$$u_{n+1}=\frac{3^{n+2}-2^{n+2}}{3^{n+1}-2^{n+1}}.$$

3. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

17 Soit (a_n) et (b_n) les suites définies par

$$\begin{cases} a_0=1, \\ a_{n+1}=a_n^2+a_n, \ n\geq 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} b_0=-0.5, \\ b_{n+1}=b_n^2+b_n, \ n\geq 0. \end{cases}$$

1. Montrer que $a_n\geq n$ et en déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$.

2. a. Montrer que la suite (b_n) est bornée par -1 et 0.

b. Montrer que (b_n) est croissante.

c. En déduire que (b_n) converge et déterminer sa limite.

18 Soit (u_n) la suite définie par

$$\begin{cases} u_0=0.1, \\ u_{n+1}=1.6u_n(1-u_n), \ n\geq 0. \end{cases}$$

1. Etudier les variations de la fonction $f: x\mapsto 1.6x(1-x)$.

2. Montrer que pour tout $n\geq 0,\ 0.1\leq u_n\leq\frac{3}{8}$.

3. En déduire que la suite (u_n) converge.

4. a. Montrer que pour tout entier naturel n,

$$\frac{3}{8}-u_{n+1}=1.6\left(\frac{5}{8}-u_n\right)\left(\frac{3}{8}-u_n\right).$$

b. On pose pour tout entier naturel n, $v_n=\frac{3}{8}-u_n$.

Montrer que $v_n\geq 0$ et en déduire que $\frac{v_{n+1}}{v_n}\leq 0.84$.

c. Montrer alors par récurrence que pour tout entier naturel n, $0\leq v_n\leq 0.84^n$.

d. En déduire la limite de (u_n).

e. Déterminer un entier naturel n_0 tel que

$0\leq\frac{3}{8}-u_n\leq 10^{-5}, n\geq n_0$.

19 Soit a un réel strictement positif et f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x)=\frac{1}{2}\left(x+\frac{5}{x}\right)$.

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$f'(x)=\frac{\left(x-\sqrt{5}\right)\left(x+\sqrt{5}\right)}{2x^2}.$$

En déduire les variations de f.

2. On considère la suite (u_n) définie par

$$\begin{cases} u_0 = 3, \\ u_{n+1} = f(u_n),\ n \geq 0. \end{cases}$$

a. Montrer que pour tout entier n,

$\sqrt{5} < u_{n+1} < u_n \leq 3$.

En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

20 Pour chacun des cas suivants, dire si les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

1. $u_n = \frac{2}{n}$, $v_n = -\frac{3}{n}$, $n \geq 2$.
2. $u_n = \frac{n+2}{n-1}$, $v_n = \frac{2n+3}{2n+5}$, $n \geq 4$.
5. $u_n = \sqrt{n+1}-\sqrt{n}$, $v_n = \sqrt{n}-\sqrt{n+1}$, $n \geq 1$.

21 On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par $u_0 = 12$, $v_0 = 1$, $u_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3}$,

$v_{n+1} = \frac{u_n + 3v_n}{4}$, $n \geq 0$.

1. Montrer que la suite $(u_n - v_n)$ est géométrique, on précisera sa raison et son premier terme.
2. Montrer que pour tout $n \geq 0$, $u_n \geq v_n$.
3. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes et qu'elles convergent vers la même limite α.
4. On pose pour tout $n \geq 0$, $t_n = 3u_n + 8v_n$.

a. Montrer que (t_n) est une suite constante.

b. En déduire la valeur de α.

22 1. Soit a et b deux réels tels que $0 < b < a$.

a. Montrer que $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$.

b. Montrer que $(a-b)^2 \leq a^2 - b^2$.

On considère les suites (a_n) et (b_n) définies par

$a_0 = a$, $b_0 = b$, $a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$,

$b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$, $n \geq 0$.

2. a. Montrer que pour tout $n \geq 0$, $b_n \leq a_n$.

b. Montrer que la suite (a_n) est décroissante et que la suite (b_n) est croissante.

3. a. Montrer que pour tout $n \geq 0$,

$$\left(a_{n+1} - b_{n+1}\right)^2 \leq \left(\frac{a_n - b_n}{2}\right)^2.$$

b. Montrer que pour tout $n \geq 0$, $a_n - b_n \leq \frac{a-b}{2^n}$.

4. Montrer que les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes et qu'elles convergent vers la même limite α.

5. On suppose que a = 2 et b = 1.

Déterminer un entier n permettant d'obtenir un encadrement de α d'amplitude 10^{-10}.

Chapitre 3

Dérivabilité

" [...] Pour résoudre ces équations, il étudie le maximum des expressions algébriques. Il prend "la dérivée première" de ces expressions qu'il annule et démontre que la racine de l'équation obtenue, substituée dans l'expression algébrique donne le maximum. [...] Et comme la seule démonstration convaincante est de faire parler le texte même d'Al-Tusi, nous allons prendre trois exemples dans l'œuvre de ce mathématicien :[...], le troisième, pour dégager comment transformation affine, divisibilité et dérivée se conjuguent dans la solution de l'équation."

(R. Ras hed, Entre Arithmétique et Algèbre , 1984).

Sharaf Al-Din Al-Tusi est un mathématicien arabe qui a écrit un traité mathématique vers 1213.

Chapitre 3

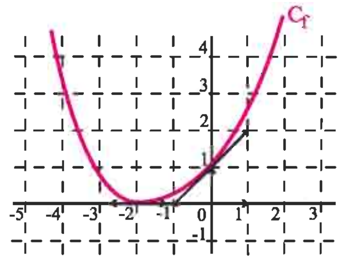
Dérivabilité

I. Rappels

Dans ce paragraphe nous rappelons les principaux résultats vus en troisième année.

Activité 1

Dans la figure ci-contre on a représenté une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$, ainsi que les tangentes aux points d'abscisses respectives -2 et 0.



1. Déterminer les nombres dérivés de f en -2 et 0.
2. Déterminer $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h)-1}{h}$ et $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{f(x)}{x+2}$.

Activité 2

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^3+3x^2+3x+1$.

et C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. Déterminer le nombre dérivé de f en chacun des réels 0 et 1.
2. Préciser les tangentes à C_f aux points d'abscisses 0 et 1.
3. Donner une approximation affine de chacun des réels $(1.0002)^3$ et $(2.0001)^3$.

Une fonction f définie sur un intervalle ouvert I est dérivable en un réel a de I s'il existe un réel, noté $f'(a)$ tel que $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)$.

Soit $f : x \mapsto a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ une fonction polynôme.
La fonction f est dérivable en tout réel x et $f'(x)=na_n x^{n-1}+\ldots+a_1$.

Si f est dérivable en a, alors le réel $f(a)+f'(a)h$ est une approximation affine de $f(a+h)$.

Activité 3

Donner une approximation affine de chacun des réels $\sin(0.0001)$; $\cos(0.0001)$.

Activité 4

Soit f la fonction définie par $f(x)=\left|x^2-1\right|$.

On note C_f la courbe de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

Une fonction f définie sur un intervalle ouvert I est dérivable en un réel a de I, si et seulement si, elle est dérivable à gauche et à droite en a et $f'_g(a)=f'_d(a)$.

1. Etudier la dérivabilité de f à droite et à gauche en -1. Interpréter.
2. Etudier la dérivabilité de f à droite et à gauche en 1. Interpréter.

Activité 5

Dans chacun des cas ci-dessous, étudier la dérivabilité de la fonction f sur l'intervalle I .

$f : x \mapsto \dfrac{\sin x}{1+\cos^2 x}$, $I = \mathbb{R}$.

$f : x \mapsto \dfrac{1+x+x^2}{1-x^2}$, $I = \left[0, \dfrac{1}{2}\right]$.

$f : x \mapsto \dfrac{x(x+1)}{1-x^2}$, $I = [-3 , -1[$.

- Une fonction est dérivable sur un intervalle ouvert I si elle est dérivable en tout réel de I.
- Soit deux réels a et b tels que $a < b$.
Une fonction est dérivable sur $[a,b]$ si elle est dérivable sur $]a,b[$, à droite en a et à gauche en b.
- On définit de façon analogue la dérivabilité d'une fonction sur les intervalles $[a,b[$, $]a,b]$, a et b finis ou infinis.

Nous donnons dans les deux tableaux ci-dessous les dérivées de certaines fonctions usuelles, ainsi que les règles opératoires sur les dérivées.

Dérivées des fonctions usuelles

Fonction f	Intervalle	f'
$x \mapsto x^n$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto nx^{n-1}$
$x \mapsto \dfrac{1}{x^n}$, $n \in \mathbb{N}^*$	Tout intervalle inclus dans $\mathbb{R}^*$	$x \mapsto -nx^{-n-1}$
$x \mapsto \sin(ax+b)$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto a\cos(ax+b)$
$x \mapsto \cos(ax+b)$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto -a\sin(ax+b)$
$x \mapsto \tan(ax+b)$	Tout intervalle inclus dans l'ensemble de définition de f.	$x \mapsto a\left(1+\tan^2(ax+b)\right)$

Opérations sur les fonctions dérivables

Soit f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle I.

Fonction	Intervalle	Fonction dérivée
$f+g$	I	$f'+g'$
af $(a \in \mathbb{R})$	I	af'
$f \times g$	I	$f' \times g + g' \times f$
$\dfrac{1}{f}$	Tout intervalle inclus dans $\{x \in I \; ; \; f(x) \neq 0\}$	$\dfrac{-f'}{f^2}$
$\dfrac{f}{g}$	Tout intervalle inclus dans $\{x \in I \text{ tel que } g(x) \neq 0\}$	$\dfrac{f'g - g'f}{g^2}$
f^n , $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$	I	$nf' f^{n-1}$
$\dfrac{1}{f^n}$, $n \in \mathbb{N}^*$	Tout intervalle inclus dans $\{x \in I \; ; \; f(x) \neq 0\}$	$-nf' f^{-n-1}$

Activité 6

Dans chacun des cas ci-dessous, calculer la dérivée de la fonction f en précisant son ensemble de définition, ainsi que celui de sa dérivée.

$f: x \mapsto \left(2-x^3\right)^4$; $\quad f: x \mapsto \cos x \sin^4 x$; $\quad f: x \mapsto \dfrac{1+x^4}{x^2-1}$;

$f: x \mapsto \dfrac{1}{(x-2)^3}+\dfrac{2}{x}$; $\quad f: x \mapsto \left(1+\tan^2 x\right)\tan^2 x$; $\quad f: x \mapsto \dfrac{\tan^2 x}{\cos^2 x}$.

II. Dérivées successives

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

La dérivée f' de f est appelée la dérivée première de f.

Si la fonction f' est dérivable sur I, sa fonction dérivée est appelée dérivée seconde de f et notée $f^{(2)}$ ou f''.

Par itération, si la fonction $f^{(n-1)}$ $(n \geq 2)$ est dérivable sur I, sa fonction dérivée est appelée dérivée $n^{\text{ème}}$ de f et est notée $f^{(n)}$.

La dérivée $n^{\text{ème}}$ de f est aussi appelée dérivée d'ordre n de f.

Activité 1

Donner, dans chacun des cas ci-dessous, les dérivées d'ordre 1, 2, 3 et 4 de f.

1. $f: x \mapsto 2x^3-4x^2+x-1$. 2. $f: x \mapsto \sin x$. 3. $f: x \mapsto \cos x$.

Activité 2

Soit f la fonction définie sur $]1,+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$.

Calculer $f'(x)$, $f''(x)$, $f^{(3)}(x)$ et $f^{(4)}(x)$, $x \in]1,+\infty[$.

III. Dérivabilité des fonctions composées

Activité 1

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\sin x^2$.

1. Déterminer $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x^2}{x^2}$.
2. Vérifier que pour tout réel x non nul, $\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=x\dfrac{\sin x^2}{x^2}$.

   En déduire que f est dérivable en 0 et donner la valeur de $f'(0)$.

Théorème (admis)

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I contenant un réel a et g une fonction définie sur un intervalle ouvert J contenant $f(a)$.

Si f est dérivable en a et g est dérivable en $f(a)$, alors $g \circ f$ est dérivable en a et $(g \circ f)'(a) = f'(a) \times g'(f(a))$.

Corollaire

Si f est dérivable sur un intervalle I et g est dérivable sur un intervalle J contenant $f(I)$, alors $g \circ f$ est dérivable sur I et $(g \circ f)'(x) = f'(x) \times g'[f(x)]$, pour tout x de I.

Activité 2

Dans chacun des cas ci-dessous, montrer que la fonction est dérivable sur I et déterminer sa dérivée.

$f : x \mapsto \sin x^2$, $I = \mathbb{R}$. $g : x \mapsto 1 - \cos x^2$, $I = \mathbb{R}$. $h : x \mapsto \sin \frac{1}{x}$, $I =]-\infty, 0[$.

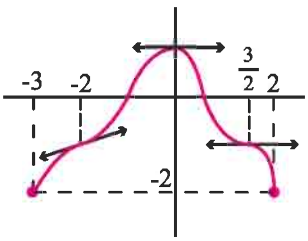
IV. Théorème des accroissements finis

Activité 1

Soit f une fonction définie sur $[-3,2]$ et dérivable sur $]-3,2[$.

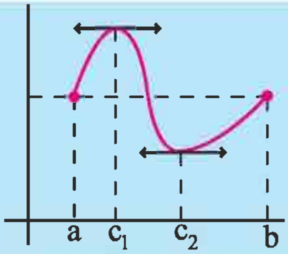
Dans la figure ci-contre on a représenté la courbe C_f de f, ainsi que les tangentes aux points d'abscisses -2, 0 et $\frac{3}{2}$.

Lire sur le graphique les abscisses des points de C_f en lesquels la tangente est parallèle à l'axe des abscisses.



Théorème de Rolle

Soit a et b deux réels tels que $a < b$.
Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ dérivable sur $]a, b[$ et telle que $f(a) = f(b)$.
Alors il existe un réel c de $]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.



Si C_f est la représentation graphique de f dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, alors il existe au moins une tangente à C_f parallèle à l'axe des abscisses.

Démonstration

Si f est constante sur $[a, b]$, le résultat est immédiat.

Supposons f non constante sur $[a, b]$.

La fonction f étant continue sur $[a, b]$, elle est bornée et atteint ses bornes m et M.

Soit x_0 et x_1 tels que $m = f(x_0)$ et $M = f(x_1)$. Alors l'un des réels x_0 ou x_1 appartient à $]a, b[$, car f n'est pas constante sur $[a, b]$. On en déduit que $f'(x_0) = 0$ ou $f'(x_1) = 0$.

Le théorème en découle.

Activité 2

Soit f la fonction définie par $f(x) = x^5 - 3x^4 - 5x^3 + 15x^2 + 4x + 2$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Calculer $f(1)$ et $f(-1)$.
2. En déduire que $\mathscr{C}$ admet au moins une tangente parallèle à l'axe des abscisses.

Activité 3

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

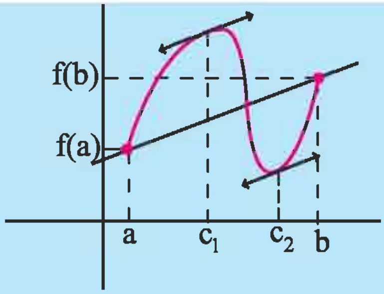
Soit A et B les points de $\mathscr{C}$ d'abscisses respectives 3 et 1.

Existe-t-il des points de $\mathscr{C}$ où la tangente est parallèle à la droite (AB)?

Théorème des accroissements finis

Soit a et b deux réels tels que $a < b$ et f une fonction définie sur $[a, b]$.
Si f est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$, alors il existe un réel c de $]a, b[$ tel que

$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$.



Si C_f est la représentation graphique de f dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ alors il existe au moins une tangente à C_f parallèle à la droite (AB) où A et B sont les points de C_f d'abscisses respectives a et b.

Démonstration

Considérons la fonction g définie sur $[a, b]$ par $g(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$.

D'après l'hypothèse faite sur f, la fonction g est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ et vérifie $g(a)=g(b)$.

On déduit du théorème de Rolle, l'existence d'un réel c de $]a, b[$ tel que $g'(c)=0$.

Le théorème en découle.

Activité 4

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

Soit f la fonction définie sur $[1, +\infty[$ par $f(x)=x^2\sqrt{x-1}$ et C_f sa courbe représentative.

Montrer que C_f admet au moins une tangente parallèle à la droite (AB), où A et B sont de coordonnées respectives (1, 0) et (2, 4).

V. Inégalité des accroissements finis

Théorème

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ $(a<b)$ et dérivable sur $]a, b[$. Soit deux réels m et M.

Si $m \le f'(x) \le M$ pour tout x de $]a, b[$, alors $m(b-a) \le f(b)-f(a) \le M(b-a)$.

Démonstration

Le théorème des accroissements finis justifie l'existence d'un réel c de $]a, b[$ tel que $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$.

L'hypothèse faite sur f' permet de déduire que $m \le f'(c) \le M$. Ce qui implique que $m(b-a) \le f'(c)(b-a) \le M(b-a)$, car $b-a>0$. Le théorème en découle.

Corollaire

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et $M>0$.

Si $|f'(x)| \le M$ pour tout x de I, alors $|f(b)-f(a)| \le M|b-a|$, pour tous réels a et b de I.

Activité 1

Soit $f : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$

$x \mapsto \sin x$

1. Montrer que $0 \le f'(x) \le 1$, pour tout réel x de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

2. En déduire que $0 \le \sin t \le t$, pour tout réel t de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Exercice résolu

Soit $f : x \mapsto \sqrt{1+x}$.

1. Montrer que f est dérivable sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$.
2. Montrer que $\frac{1}{\sqrt{6}} \leq f'(x) \leq \frac{1}{2}$, pour tout réel x de $\left[0, \frac{1}{2}\right]$.
3. Montrer que $1+\frac{t}{\sqrt{6}} \leq \sqrt{1+t} \leq 1+\frac{t}{2}$, pour tout réel t de $\left[0, \frac{1}{2}\right]$.
4. En déduire un encadrement de $\sqrt{1+10^{-10}}$.

Solution

1. La fonction $f : x \mapsto \sqrt{1+x}$ est dérivable en tout réel x tel que $1+x>0$.

On en déduit que f est dérivable sur $]-1,+\infty[$ et par suite sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$.

2. Pour tout réel x de $[0, \frac{1}{2}]$, $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{1+x}}$.

Par ailleurs, $1 \leq \sqrt{1+x} \leq \sqrt{1.5}$ pour tout réel x de $\left[0, \frac{1}{2}\right]$.

On en déduit que $\frac{1}{2\sqrt{1.5}} \leq \frac{1}{2\sqrt{1+x}} \leq \frac{1}{2}$, ou encore que $\frac{1}{\sqrt{6}} \leq f'(x) \leq \frac{1}{2}$, pour x de $\left[0, \frac{1}{2}\right]$.

3. Soit $t \in \left]0, \frac{1}{2}\right]$. La fonction f étant dérivable sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$, elle est dérivable sur l'intervalle $[0, t]$.

Le théorème sur les inégalités des accroissements finis implique que

$\frac{1}{\sqrt{6}}t \leq f(t)-f(0) \leq \frac{1}{2}t$, ou encore que $1+\frac{t}{\sqrt{6}} \leq \sqrt{1+t} \leq 1+\frac{t}{2}$, pour tout t de $\left]0, \frac{1}{2}\right]$.

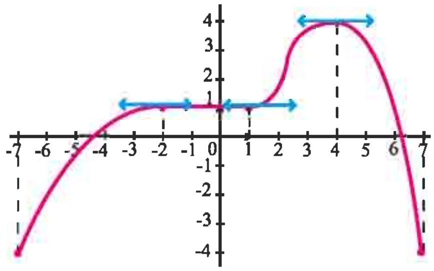
La double inégalité est vraie pour $t=0$.

4. On déduit de ce qui précède que $1+\frac{10^{-10}}{\sqrt{6}} \leq \sqrt{1+10^{-10}} \leq 1+\frac{10^{-10}}{2}$.

VI. Variations d'une fonction

Activité 1

Le graphique ci-contre représente une fonction f dérivable sur $[-7, 7]$.



1. Déterminer graphiquement les intervalles où f est strictement monotone.
2. Déterminer graphiquement le signe de $f'(x)$.

Théorème

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.
Si la dérivée de f est strictement positive sur I, alors la fonction f est strictement croissante sur I.
Si la dérivée de f est strictement négative sur I, alors la fonction f est strictement décroissante sur I.

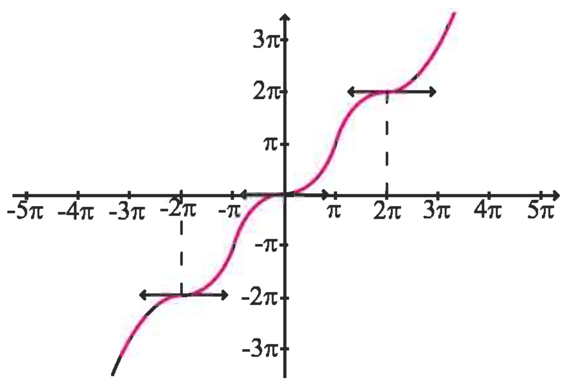
Démonstration

Supposons que $f'(x)>0$ pour tout x de I et considérons deux réels a et b de I tels que $a<b$.
La fonction f étant dérivable sur I, elle est dérivable sur $[a, b]$.
D'après le théorème des accroissements finis, il existe un réel c de $]a, b[$ tel que $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$. On en déduit que $f(b)-f(a)>0$, car $f'(c)$ et $b-a$ sont strictement positifs. Ce qui prouve que f est strictement croissante sur I.
La deuxième propriété découle de la première en considérant la fonction –f.

Activité 2

On a représenté dans la figure ci-contre la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x-\sin x$.

1. Déterminer graphiquement le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$.
2. a. Déterminer la fonction dérivée f'.
   b. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f'(x)=0$ et interpréter graphiquement le résultat.



Théorème

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.
Si f' est positive et ne s'annule sur aucun intervalle ouvert contenu dans I, alors f est strictement croissante sur I.
Si f' est négative et ne s'annule sur aucun intervalle ouvert contenu dans I, alors f est strictement décroissante sur I.

Démonstration

De l'hypothèse $f'(x)\geq 0$ pour tout réel x de I, il résulte que la fonction f est croissante sur I.
Supposons qu'il existe deux réels a et b tels que $a<b$ et $f(a)=f(b)$. Il en résulte que $f(a)\leq f(x)\leq f(b)$, pour tout réel x de $]a, b[$. Par suite f est constante sur $[a, b]$ et $f'(x)=0$ pour tout x de $]a, b[$. Ce qui contredit l'hypothèse faite sur f'.
La deuxième propriété découle de la première en considérant la fonction –f.

Théorème

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$.

• Si f est croissante (respectivement strictement croissante) sur $]a, b[$ alors f est croissante (respectivement strictement croissante) sur $[a, b]$.

• Si f est décroissante (respectivement strictement décroissante) sur $]a, b[$ alors f est décroissante (respectivement strictement décroissante) sur $[a, b]$.

Démonstration

Soit $c < d$ deux réels de $[a, b]$. La fonction f étant continue sur $[c, d]$ et dérivable sur $]c, d[$, il existe un réel x_0 de $]c, d[$ tel que $f(d) - f(c) = (d - c) f'(x_0)$.

Le théorème en découle.

Activité 3

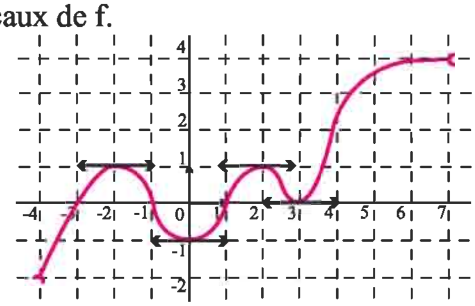
Etudier les variations de la fonction $x \mapsto \sqrt{1 - \sin x}$ sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

VII. Extrema

Activité 1

Dans la figure ci-dessous, on a représenté une fonction f définie sur $]-4, 7[$.

Déterminer graphiquement les extrema locaux de f.

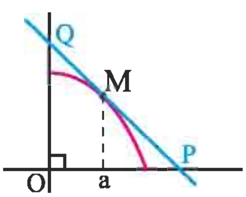


Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a un réel de I.
On dit que f admet un maximum local en a, s'il existe un intervalle ouvert J contenant a et inclus dans I tel que pour tout x de J, $f(x) \le f(a)$.
On dit que f admet un minimum local en a, s'il existe un intervalle ouvert J contenant a et inclus dans I tel que pour tout x de J, $f(x) \ge f(a)$.
Lorsque f admet un minimum local ou un maximum local en a on dit que f admet un extremum local en a.

Activité 2

Dans la figure ci-contre on a représenté la restriction de la fonction $f : x \mapsto 1 - x^2$ sur $[0, 1]$ dans un repère orthonormé ainsi que la tangente en un point M d'abscisse a dans $]0, 1]$.

Déterminer le point M pour que l'aire du triangle OPQ soit minimale.



Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I et a un réel de I.
Si f admet un extremum local en a alors $f'(a) = 0$.

Si $f'(x)$ s'annule en a en changeant de signe alors f admet un extremum local en a.

VII. Point d'inflexion

Activité 1

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^3-3x+1$.

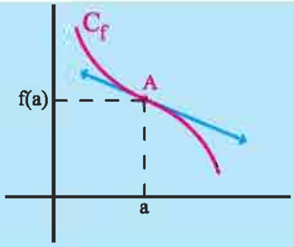
On désigne par C_f la courbe de f dans un repère orthonormé.

1. Ecrire une équation de la tangente T à C_f en son point d'abscisse 0.
2. Etudier la position relative de C_f et T.
3. Etudier les variations de f puis tracer T et C_f.

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et dérivable en un réel a de I et C_f sa courbe dans un repère orthogonal $(O,\vec{i},\vec{j})$.

On dit que le point $A(a,f(a))$ est un point d'inflexion de C_f si C_f traverse sa tangente en ce point.



Théorème (admis)

Soit f une fonction deux fois dérivable sur $]a-h,\ a+h[$, $(h>0)$ et C_f sa représentation graphique dans un repère orthonormé.

Si la fonction dérivée seconde f'' de f s'annule en a en changeant de signe, alors le point $I(a,f(a))$ est un point d'inflexion de la courbe C_f.

Activité 2

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^4-6x^2+1$ et C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

Montrer que C_f admet deux points d'inflexion que l'on précisera.

Activité 3

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=2x-\sin x$.

On désigne par C_f la courbe de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. Etudier les variations de f sur $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$.
2. Déterminer les points d'inflexions de C_f sur $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$.

QCM

Cocher la réponse exacte.

1. La fonction $x \mapsto \cos\left(\pi x^2\right)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est

☐ $x \mapsto 2\pi \sin\left(\pi x^2\right)$.   ☐ $x \mapsto 2\pi x \sin\left(\pi x^2\right)$.   ☐ $x \mapsto -2\pi x \sin\left(\pi x^2\right)$.

2. Soit f une fonction dérivable sur $[-2, 2]$ dont le tableau de variation de f' est le suivant.

x	-2	-1	0	1	2
f'	1	$\searrow$ 0	-2	$\nearrow$ -1	$\frac{-1}{4}$

• Alors

☐ $f(-2) < f(-1)$.   ☐ $f(-1) < f(0)$.   ☐ $f(0) < f(1)$.

• Dans un repère orthogonal, la courbe de f admet exactement deux tangentes parallèles à la droite d'équation

☐ $y = -\frac{1}{2}$.   ☐ $y = \frac{1}{2}x$.   ☐ $y = -\frac{1}{2}x$.

3. L'image de $[1, +\infty[$ par la fonction $x \mapsto \sqrt{x^2 - 1} - 1$ est

☐ $[0, +\infty[$.   ☐ $[-1, +\infty[$.   ☐ $]-\infty, 0]$.

4. La courbe représentative de la fonction $x \mapsto \frac{1}{20}x^5 - 4x^2$ admet un point d'inflexion d'abscisse

☐ $x = 0$.   ☐ $x = -2$.   ☐ $x = 2$.

5. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$.
La courbe de f dans un repère orthogonal admet exactement

☐ deux tangentes horizontales.   ☐ une tangente horizontale.   ☐ aucune tangente horizontale.

VRAI - FAUX

Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse.

1. Soit f une fonction dérivable sur $[-1, 2]$ telle que $f(-1) = 2$, $f(2) = -1$.
Alors l'équation $f'(x) = -1$ admet au moins une solution dans $[-1, 2]$.
2. Si le produit de deux fonctions est dérivable en un réel a alors chacune des deux fonctions est dérivable en a.
3. Dans un repère orthogonal, la courbe représentative de la fonction $f : x \mapsto \left(x^2 - x\right)(x-2)$ admet exactement deux tangentes horizontales.
4. Soit f une fonction dérivable sur $[2, 5]$ telle que $|f'(t)| \leq 2$ pour $t \in [2, 5]$.
Alors $|f(5) - f(2)| \leq 6$.

1 Le plan est muni d'un repère orthogonal.

Dans chacun des cas ci-dessous justifier la dérivabilité de f en a et donner une équation de la tangente au point d'abscisse a.

1. $x \mapsto \dfrac{x+1}{x-1}$, $a = 2$.
2. $x \mapsto 0.25x^4 + 0.5x^3 - x$, $a = 0$.
3. $x \mapsto \sqrt{x^2-4}$, $a = -3$.
4. $x \mapsto \sqrt{|2x+1|}$, $a = -1$.

2 En utilisant la définition de la dérivabilité en un réel, calculer les limites ci-dessous.

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}}{x-1} ; \lim_{x\to 3} \frac{x-\sqrt{x-2}-2}{x-3} ;$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{(x+1)^{195}-1}{x} ; \lim_{x\to 1} \frac{x^5+x^4+x^3+x^2-4}{x-1}.$$

3 Soit la fonction $f : x \mapsto |x^2-4|$.

1. Etudier la dérivabilité de f en 2 et en -2.
2. Construire, dans un repère orthonormé, les demi-tangentes à la courbe de f aux points d'abscisses 2 et -2

4 1. Donner une approximation affine de $\dfrac{1}{(1+h)^2}$ pour h voisin de 0.

2. En déduire une estimation des réels $\dfrac{1}{(1.0000000002)^2}$ et $\dfrac{1}{(0.9999999998)^2}$.

5 Dans chacun des cas suivants, vérifier que la fonction f est dérivable sur l'intervalle I et déterminer sa fonction dérivée.

1. $f : x \mapsto 3x^{10} - \dfrac{5}{4}x^8 + 3x - 10$, $I = \mathbb{R}$.
2. $f : x \mapsto (1-x-3x^3)(x+2x)^3$, $I = \mathbb{R}$.
3. $f : x \mapsto \dfrac{x^2}{1-x}$, $I =]1, +\infty[$.
4. $f : x \mapsto \dfrac{(x+1)^3}{x^2}$, $I = [1, +\infty[$.
5. $f : x \mapsto \cos(3x) - \sin(2x)$, $I = \mathbb{R}$.
6. $f : x \mapsto \dfrac{\sin x}{1-\cos x}$, $I =]0, \pi]$.
7. $f : x \mapsto (1+\sin(2x))^3$, $I = \mathbb{R}$.
8. $f : x \mapsto \tan^2\left(\dfrac{\pi}{2}x\right)$, $I = [0, 1[$.
9. $f : x \mapsto \sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$, $I =]1, +\infty[$.
10. $f : x \mapsto \dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+2}$, $I =]0, +\infty[$.

6 Soit les fonctions f et g définies par

$f(x) = x^3 - 3x$ et $g(x) = x - \dfrac{4}{x}$.

On désigne par $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ leurs courbes représentatives respectives dans un repère orthonormé.

1. Montrer que $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ ont deux points communs A et B.
2. Vérifier qu'en chacun de ces points les deux courbes admettent la même tangente.
Donner une équation de ces tangentes.

7 Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{-x-1} & \text{si } x < -1, \\ x^2 - 1 & \text{si } -1 \le x \le 1, \\ 2\sin(x-1) & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

1. Etudier la continuité de f en -1 et en 1.
2. Etudier la dérivabilité de f en -1 et en 1.
3. Montrer que f est dérivable sur chacun des intervalles $]-\infty, -1[$, $]-1, 1[$ et $]1, +\infty[$.

8 Déterminer, dans chacun des cas, les dérivées successives de la fonction f.

1. $f : x \mapsto x^5 - 2x^3 + 3x + 4$.
2. $f : x \mapsto \cos x + \sin x$.
3. $f : x \mapsto \sin 2x$.
4. $f : x \mapsto \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x+1}$, $x > 1$.

9 Vérifier, dans chacun des cas suivants, que la fonction f est dérivable sur l'intervalle I et déterminer sa dérivée.

2. $f : x \mapsto \sqrt{\sin x}$, $I = \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$.

3. $f : x \mapsto \sin\left(\frac{\pi}{x}\right)$, $I = [1, +\infty[$.

4. $f : x \mapsto \tan(\sin x)$, $I = \mathbb{R}$.

10 Soit la fonction $f : x \mapsto \frac{x^2 - 3x + 6}{x - 1}$.
On désigne par $\mathscr{C}$ la courbe de f dans un repère orthonormé.
1. Montrer que $\mathscr{C}$ admet deux tangentes parallèles à la droite d'équation $y = -3x$.
2. Calculer les coordonnées de chacun des points de contact et écrire une équation de chacune des tangentes en ces points.

11 On considère la fonction f définie sur $[1, 2]$ par $f(x) = x^3 - 3x + 2$ et on note $\mathscr{C}$ la courbe de f dans un repère orthonormé.
Soit A et B les points de $\mathscr{C}$ d'abscisses respectives 1 et 2.
Déterminer les points de $\mathscr{C}$ en lesquels la tangente est parallèle à la droite (AB).

12 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$.
Sans calculer $f'(x)$, montrer que f' admet trois zéros distincts.

13 Soit la fonction $f : x \mapsto \tan x$.

1. Montrer que $1 \le f'(x) \le 2$, pour tout x de $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$.

2. En déduire que $x \le \tan x \le 2x$, pour tout x de $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$.

14 1. Montrer, à l'aide du théorème des inégalités des accroissements finis, que
$0 \le \sqrt{1+x} - 1 \le \frac{x}{2}$, $x \ge 0$.
2. En déduire que pour tout réel $x > 0$,
$x \le \sqrt{1+x^2} \le x + \frac{1}{2x}$.

15 Montrer les inégalités ci-dessous.

a. $|\sin x| \le |x|$, $x \in \mathbb{R}$.

b. $x \le \tan x$, $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$.

c. $1 - x \le \cos x \le 1 + x$, $x \in [0, +\infty[$.

16 Soit la fonction $f : x \mapsto (x-1)\sqrt{1-x}$.
1. Donner l'ensemble de définition de f.
2. Etudier la dérivabilité de f en 1. Interpréter.
3. Dresser le tableau de variation de f.

17 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}}$.
1. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et que
$|f'(x)| \le \frac{1}{2}$, $x \ge 0$.
2. Montrer que pour tout $x \ge 0$,
$1 - \frac{x}{2} \le \frac{1}{\sqrt{1+x}} \le 1 + \frac{x}{2}$.
3. En déduire un encadrement de $\frac{1}{\sqrt{1+10^{-11}}}$.

18 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par
$f(x) = x^3 - x$.
1. Etudier les variations de f.
2. Comparer les réels A et B dans chacun des cas suivants.

a. $A = 0.577350269^3 - 0.577350269$.

$B = 0.577350268^3 - 0.577350268$.

b. $A = 0.577350271^3 - 0.577350271$.

$B = 0.577350272^3 - 0.577350272$.

19 Pour chacune des fonctions ci-dessous, étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle I.

1. $f : x \mapsto \sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}$, $\quad I = [1, +\infty[$.
2. $g : x \mapsto \cos x - \sin x$, $\quad I = [0, \pi]$.
3. $h : x \mapsto \cos(\sin x)$, $\quad I = [0, \pi]$.

20 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} 4\sqrt{x+1} & \text{si } x \geq 3, \\ x^2 - 5x + c & \text{si } x < 3, \end{cases} \text{ où c est un réel.}$$

1. Déterminer le réel c pour que f soit continue sur $\mathbb{R}$. Pour cette valeur de c, montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer sa fonction dérivée.
2. Dresser le tableau de variation de f.
3. Préciser l'extremum de f.

21 Soit la fonction $f : x \mapsto x\sqrt{1-x^2}$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Etudier $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{f(x) - f(1)}{x-1}$. Que peut-on dire de la courbe de f au point d'abscisse 1?
3. a. Vérifier que f est impaire.
b. Dresser le tableau de variation de f
c. Préciser les extrema de f,
4. a. Déterminer la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.
b. Montrer que l'origine du repère est un point d'inflexion de $\mathscr{C}$.

22 Soit f la fonction définie par

$f(x) = x\sqrt{x} - \dfrac{3}{16}x^2$, $x > 0$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. a. Montrer que f est dérivable sur $[0, +\infty[$ et que

$$f'(x) = \frac{12\sqrt{x} - 3x}{8}, \ x \geq 0.$$

b. Etudier les variations de f.
c. Existe-t-il un réel positif x tel que

$$x\sqrt{x} - \frac{3}{16}x^2 = 20 \ ?$$

2. a. Montrer que f est deux fois dérivable sur $]0, +\infty[$.
b. Déterminer le point d'inflexion de la courbe de $\mathscr{C}$.

23 Soit la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x + \sqrt{x}}$.

1. Préciser l'ensemble de définition de f.
2. Etudier la dérivabilité de f à droite en 0 et interpréter.
3. a. Montrer que f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et calculer $f'(x)$.
b. Dresser le tableau de variation de f.

24 On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{2}(4 + \sin x)$.

1. Montrer que $|f'(x)| \leq 0.5$, $x \in \mathbb{R}$.
2. a. Montrer que la fonction $g : x \mapsto f(x) - x$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.
b. Montrer que $\dfrac{3}{2} - x \leq g(x) \leq \dfrac{5}{2} - x$, pour tout réel x.
c. En déduire $\lim\limits_{+\infty} g$, $\lim\limits_{-\infty} g$, puis déterminer $g(\mathbb{R})$.
d. Montrer qu'il existe un unique réel a tel que $f(a) = a$ et vérifier que $\dfrac{2\pi}{3} < a < \dfrac{5\pi}{6}$.
3. Soit un réel u_0 et (u_n) la suite de premier terme u_0 et telle que $u_{n+1} = f(u_n)$, pour tout entier naturel n.
a. Montrer que $|u_{n+1} - a| \leq 0.5|u_n - a|$, pour tout entier naturel n.
b. En déduire que $|u_n - a| \leq (0.5)^n |u_0 - a|$, pour tout entier naturel n.
c. Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

Chapitre 4

Fonctions réciproques

C'est le 29 novembre 1873 [...] que Cantor écrit à Dedekind qu'il voudrait lui "soumettre une question qui a pour moi un certain intérêt théorique, mais à laquelle je ne puis répondre". Il s'agissait de savoir s'il existe une bijection entre $\mathbb{N}$ et $\mathbb{R}$. [...] La lettre de Cantor du 7 décembre 1873 contient la première démonstration de la non-existence d'une bijection entre $\mathbb{N}$ et $]0, 1[$.
[...] C'est seulement trois ans plus tard, le 20 juin 1877, que Cantor envoie à Dedekind sa première démonstration [...] de la bijection entre $[0, 1]$ et $[0, 1]\times[0, 1]$, [...], écrit-il " [...]. Tant que vous ne m'aurez pas approuvé, je ne puis que dire : je le vois, mais je ne le crois pas"

(J.Dieudonné, Abrégé d'Histoire des Mathématiques, 1978)

Chapitre 4

Fonctions réciproques

I. Définition

Activité 1

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=x^2+3$.

1. a. Déterminer $g([0,+\infty[)$.

   b. Montrer que pour tout réel y de $[3,+\infty[$, l'équation $g(x)=y$ admet une unique solution dans $[0,+\infty[$ que l'on déterminera.

2. Soit h la fonction définie sur $[3,+\infty[$ par $h(x)=\sqrt{x-3}$.

   Montrer que pour tout réel y de $[0,+\infty[$, l'équation $h(x)=y$ admet une unique solution dans $[3,+\infty[$.

3. Déterminer $g\circ h$ et $h\circ g$.

Définition

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur I.
On dit que f réalise une bijection de I sur $f(I)$ (ou que f est une bijection de I sur $f(I)$), si pour tout y de $f(I)$, l'équation $f(x)=y$ admet une unique solution dans I.

Théorème

Si f est une fonction strictement monotone sur un intervalle I, alors f réalise une bijection de I sur $f(I)$.

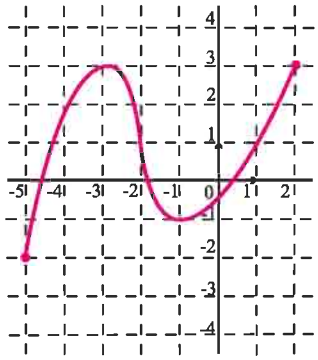
Démonstration

Soit y un réel de $f(I)$. Par définition de $f(I)$, il existe un réel x de I tel que $f(x)=y$.
L'unicité résulte de la stricte monotonie de f.

Activité 2

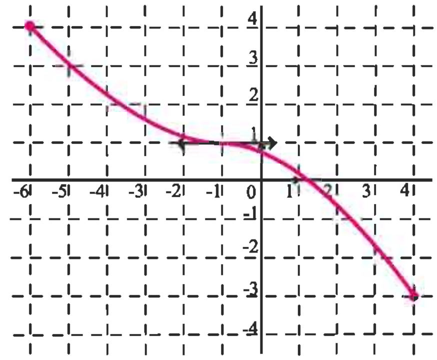
Parmi les fonctions f_i, $i\in\{1,2,3,4\}$ représentées ci-après, identifier celles qui réalisent une bijection de I sur $f_i(I)$.

①



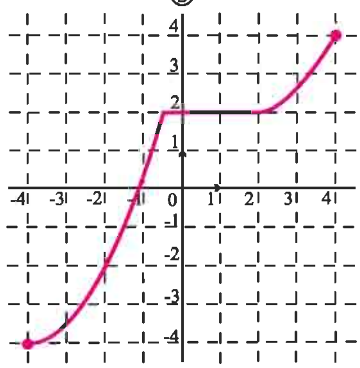
$I=[-5,2]\quad f_1(I)=[-2,3]$

②



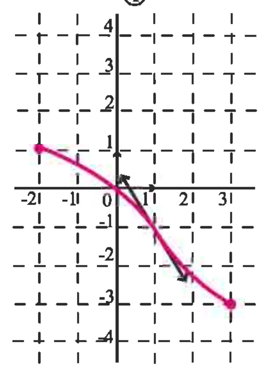
$I=[-6,4]\quad f_2(I)=[-3,4]$

③



$I=]-4,4[\quad f_3(I)=]-4,4[$

④



$I=[-2,3[\quad f_4(I)=]-3,1]$

Définition

Soit f une bijection d'un intervalle I sur $f(I)$. On appelle fonction réciproque de f et on note f^{-1} la fonction définie sur $f(I)$ qui à tout y de $f(I)$ associe l'unique solution dans I de l'équation $f(x)=y$.

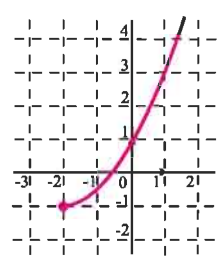
Conséquence

Soit f une bijection d'un intervalle I sur $f(I)$ et f^{-1} sa fonction réciproque.

Pour tout x de I et tout y de $f(I)$, $f(x)=y$, si et seulement si, $f^{-1}(y)=x$.

$f^{-1}\circ f(x)=x$, pour tout x de I et $f\circ f^{-1}(y)=y$, pour tout y de $f(I)$.

Activité 3



Dans la figure ci-contre on a représenté dans un repère orthonormé une bijection de $[-2,+\infty[$ sur $[-1,+\infty[$.

Déterminer $f^{-1}(-1)$, $f^{-1}(1)$ et $f^{-1}(3)$.

Activité 4

1. Soit la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$.

   a. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

   b. Expliciter $f^{-1}(x)$ pour tout réel x de $\mathbb{R}_+^*$.

2. Soit la fonction $g : x \mapsto \sqrt{1+x^2}$.

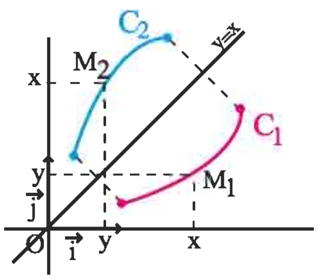
   a. Montrer que g réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $[1, +\infty[$.

   b. Déterminer g^{-1}.

Représentation graphique de f^{-1}.

Soit f une bijection de I sur J et C_1 et C_2 les courbes respectives de f et f^{-1} dans un repère orthonormé.
Soit $M_1(x,y)$ un point du plan et $M_2(y,x)$ son symétrique par rapport à la droite $\Delta : y = x$. Alors

$$M_1(x,y) \in C_1 \Leftrightarrow \begin{cases} y = f(x) \\ x \in I \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = f^{-1}(y) \\ y \in J \end{cases} \Leftrightarrow M_2 \in C_2.$$

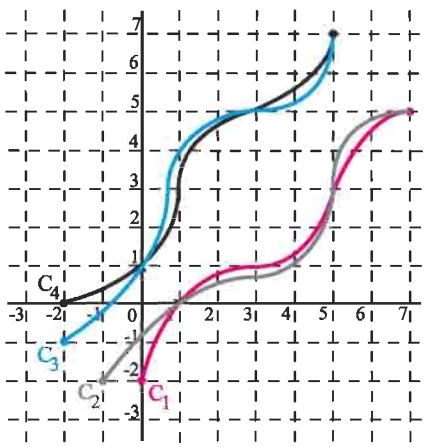


Conséquence

Les courbes respectives d'une bijection f et de sa réciproque f^{-1} dans un repère orthonormé sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

Activité 5

Le plan est muni d'un repère orthonormé.
Dans la figure ci-contre, on a représenté les courbes de deux bijections f et g définies respectivement sur $[0,7]$ et $[-2,5]$, ainsi que les courbes de leurs fonctions réciproques.
Identifier la courbe de chacune des fonctions f, f^{-1}, g et g^{-1}.



II. Fonction réciproque d'une fonction strictement monotone

Théorème

Si f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I alors sa réciproque f^{-1} est continue et strictement monotone sur l'intervalle $f(I)$ et varie dans le même sens que f.

Démonstration

- La continuité de f^{-1} est admise.
- Supposons, par exemple que f est strictement croissante sur I.

Soit $y_1 < y_2$ deux réels de $f(I)$ et soit x_1 et x_2 les réels de I tels que $y_1 = f(x_1)$ et $y_2 = f(x_2)$. Si l'on avait $x_1 \geq x_2$, on en déduirait que $f(x_1) \geq f(x_2)$, c'est à dire $y_1 \geq y_2$.

Ce qui est en contradiction avec l'hypothèse $y_1 < y_2$. Par suite $f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$ et f^{-1} est strictement croissante sur $f(I)$.

Activité 1

Soit f la fonction définie sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ par $f(x) = \sin x$.

1. Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} continue sur un intervalle J que l'on précisera.
2. Donner les valeurs de $f^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$; $f^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; $f^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; $f^{-1}(1)$.

Activité 2

Soit f la fonction définie sur $[1, +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$.

1. Montrer que f réalise une bijection de $[1, +\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera.
2. Expliciter $f^{-1}(x)$ et montrer que f^{-1} est dérivable sur $\left]0, \frac{1}{2}\right[$.
3. En utilisant la relation $f \circ f^{-1}(y) = y$, pour tout $y \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$,

montrer que $\left(f^{-1}\right)'(y) = \dfrac{1}{f'\left(f^{-1}(y)\right)}$.

Théorème

Soit f une bijection d'un intervalle ouvert I sur $f(I)$,
a un réel de I et $b = f(a)$.

Si f est dérivable en a et si $f'(a) \neq 0$, alors f^{-1} est dérivable en b et $\left(f^{-1}\right)'(b) = \dfrac{1}{f'(a)}$.

Démonstration

Soit y un réel de $f(I)$ différent de b et soit $x = f^{-1}(y)$. Alors x est distinct de a et appartient à I.

On peut alors écrire $\dfrac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y - b} = \dfrac{x - a}{f(x) - f(a)} = \dfrac{1}{\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}}$.

Lorsque y tend vers b, $x = f^{-1}(y)$ tend vers $a = f^{-1}(b)$ car f^{-1} est continue en b.

On en déduit que $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a)$. Le théorème en découle.

Corollaire

Soit f une bijection d'un intervalle I sur $f(I)$.

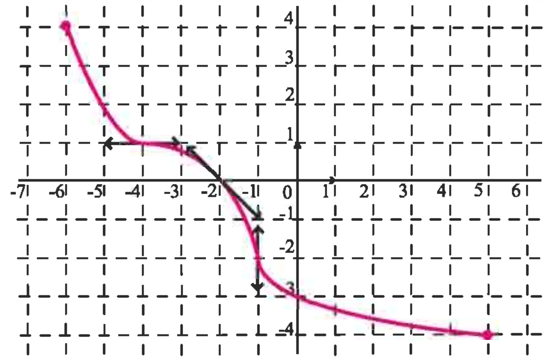
Si f est dérivable sur I et $f'(x) \neq 0$ pour tout x de I, alors f^{-1} est dérivable sur $f(I)$ et

$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'\left[f^{-1}(y)\right]}$, pour tout y de $f(I)$.

Activité 3

Dans la figure ci-contre on a représenté dans un repère orthonormé une bijection f de $[-6, 5]$ sur $[-4, 4]$ ainsi que les tangentes au points d'abscisses -4, -2 et -1.

Etudier la dérivabilité de la fonction f^{-1} aux points d'abscisses -2, 0 et 1.



Activité 4

Soit f la fonction définie sur $[0, \pi]$ par $f(x) = \cos x$ et C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

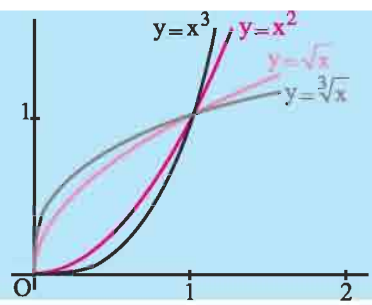
1. Tracer C_f.
2. Montrer que f réalise une bijection de $[0, \pi]$ sur $[-1, 1]$.
3. Etudier la dérivabilité de f^{-1} en 0 et calculer $(f^{-1})'(0)$.
4. On désigne par $C_{f^{-1}}$ la courbe représentative de f^{-1}.
   Que peut-on dire des demi-tangentes à $C_{f^{-1}}$, à droite en -1 et à gauche en 1?
5. Tracer la courbe de f^{-1} dans le même repère orthonormé.

III. Fonction $x \mapsto \sqrt[n]{x}$, $n \geq 2$

Théorème et définition

Soit n un entier supérieur ou égal à 2.

La fonction $x \mapsto x^n$ réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$. Elle admet une fonction réciproque strictement croissante de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$, appelée fonction racine $n^{\text{ème}}$.



Notation

L'image d'un réel positif x par la fonction racine $n^{\text{ème}}$ est noté $\sqrt[n]{x}$ et se lit « racine $n^{\text{ème}}$ de x ».

Lorsque $n = 2$ et pour x positif $\sqrt[2]{x} = \sqrt{x}$.

Conséquence

Pour tous réels positifs x et y , $y = x^n$, si et seulement si, $x = \sqrt[n]{y}$.

Les opérations sur les radicaux découlent immédiatement de la définition de la fonction racine $n^{\text{ème}}$.

Conséquence

Soit deux entiers n et p tels que $n \geq 2$ et $p \geq 2$ et deux réels positifs a et b. Alors

$\sqrt[n]{a^n} = a$. $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$. $\sqrt[n]{a.b} = \sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}$. $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, $b \neq 0$.

$\sqrt[n]{a} = \sqrt[np]{a^p}$. $\left(\sqrt[n]{a}\right)^p = \sqrt[n]{a^p}$. $\sqrt[n]{\sqrt[p]{a}} = \sqrt[np]{a}$.

Activité 1

Ecrire plus simplement les réels $\sqrt[6]{64}$, $\sqrt[6]{2^{-12}}$, $\sqrt{\sqrt[3]{729}}$, $\sqrt[3]{2^6.3^3}$, $\dfrac{\sqrt[8]{16}}{\sqrt[8]{81}}$, $\sqrt[3]{2\sqrt{2}}$.

Activité 2

1. Comparer $\sqrt[6]{2^4}$ et $\sqrt[4]{2^3}$.
2. Soit un réel $x \geq 0$. Comparer $\sqrt[6]{x^4}$ et $\sqrt[4]{x^3}$.

Théorème

Pour tout entier $n \geq 2$, la fonction $f : x \mapsto \sqrt[n]{x}$ est continue sur $[0,+\infty[$ et dérivable sur $]0,+\infty[$. De plus, $f'(x) = \dfrac{1}{n\left(\sqrt[n]{x^{n-1}}\right)}$, pour tout $x > 0$.

Démonstration

La fonction $g : x \mapsto x^n$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et admet une dérivée ne s'annulant pas sur $\mathbb{R}_+^*$.

On en déduit que sa fonction réciproque est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

De plus, $\left(g^{-1}\right)'(x) = \dfrac{1}{g'\left(g^{-1}(x)\right)} = \dfrac{1}{n\left(\sqrt[n]{x}\right)^{n-1}} = \dfrac{1}{n\left(\sqrt[n]{x^{n-1}}\right)}$, $x > 0$.

Activité 3

Etudier la dérivabilité à droite en 0 de la fonction $x \mapsto \sqrt[n]{x}$, $n \geq 2$. Interpréter.

Activité 4

Etudier et représenter les fonctions $x \mapsto \sqrt[3]{x}$; $x \mapsto \sqrt[4]{x}$; $x \mapsto \sqrt[6]{x}$.

QCM

Cocher la réponse exacte.

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\sin x$.

   Alors f réalise une bijection de I sur $[-1, 1]$, où

   ☐ $I=[0, 2\pi]$. ☐ $I=[0, \pi]$. ☐ $I=\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

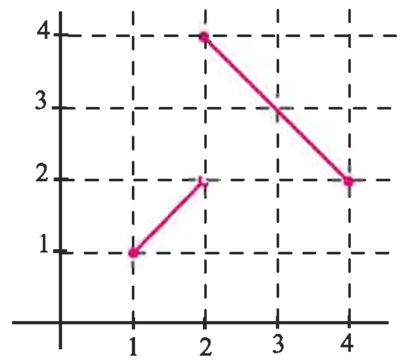
2. Soit f la fonction définie sur $[0, \pi]$ par $f(x)=\cos x$.

   $\left(f^{-1}\right)'\left(\frac{1}{2}\right)$ est égal à

   ☐ $\frac{2}{\sqrt{3}}$. ☐ -2. ☐ $-\frac{2}{\sqrt{3}}$.

3. Soit f une fonction dont la représentation graphique est ci-contre. f réalise une bijection de

   ☐ $[1, 4]$ sur $[1, 4]$.
   ☐ $[1, 2]$ sur $[1, 2]$.
   ☐ $[1, 3]$ sur $[1, 3]$.



4. La fonction $f : x \mapsto \sqrt[3]{x}$ est dérivable sur

   ☐ $[0, +\infty[$ ☐ $]0, +\infty[$ ☐ $\mathbb{R}^*$.

VRAI - FAUX

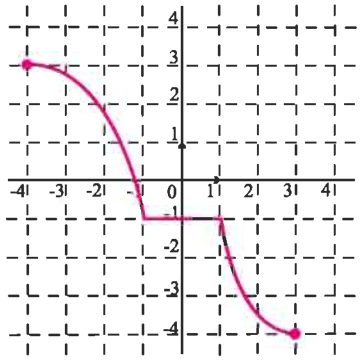
Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse.

1. Soit f une fonction continue sur $[1, +\infty[$ telle que $f(1)=2$ et $\lim\limits_{+\infty} f = 3$.

   Alors f réalise une bijection de $[1, +\infty[$ sur $[2, 3[$.
2. Toute fonction affine réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.
3. Pour tout réel $x>0$, $\sqrt[4]{x} \geq \sqrt[3]{x}$.
4. La fonction réciproque de la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x)=\sqrt[n]{x}$ est dérivable à droite en 0.
5. Si f est strictement monotone et dérivable sur un intervalle I et si f garde un signe constant sur I, alors sa réciproque garde un signe constant sur $f(I)$.

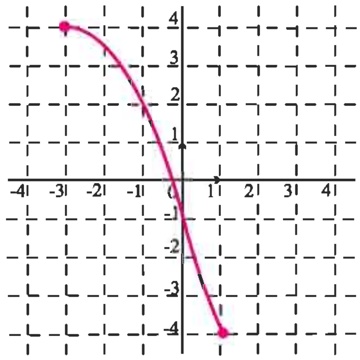
1 Parmi les fonctions f_i, $i \in \{1, 2, 3\}$ représentées ci-après, identifier celles qui réalisent une bijection de I sur $f_i(I)$.

1.



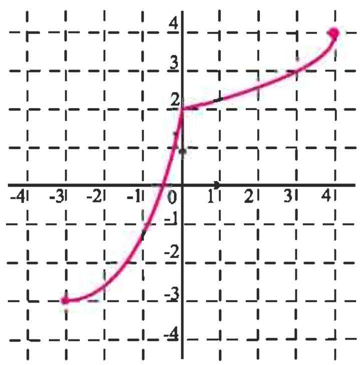
$I = [-4, 3]$ $f_1(I) = [-4, 3]$

2.



$I = [-3, 1]$ $f_2(I) = [-4, 4]$

3.



$I = [-3, 4]$ $f_3(I) = [-3, 4]$

2 Soit f la fonction définie sur l'intervalle $I =]-\infty, 2]$ par $f(x) = x^2 - 4x + 5$.

1. Montrer que f réalise une bijection de I sur un intervalle J que l'on précisera.
2. Tracer la courbe de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
3. Soit f^{-1} la fonction réciproque de f.

a. Tracer la courbe de f^{-1} dans le même repère.

b. Etudier graphiquement la dérivabilité de f^{-1} à droite en 1.

c. Montrer que f^{-1} est dérivable sur $]1, +\infty[$.

d. Expliciter $f^{-1}(x)$, pour $x \in J$.

3 Soit f la fonction définie sur l'intervalle $I =]-\infty, 0[$ par $f(x) = x - 1 - \dfrac{1}{x}$.

1. Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J que l'on déterminera.
2. Expliciter $f^{-1}(x)$, pour tout réel x.
3. Montrer que f^{-1} est dérivable sur J et expliciter $(f^{-1})'(x)$, x dans J.

4 Soit f la fonction définie sur l'intervalle $I =]1, +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$.

1. Etudier les variations de f et montrer que f réalise une bijection de I sur I.
2. a. Expliciter $f \circ f(x)$, $x \in I$.

b. Qu'en déduit-on ?

5 Le plan est muni d'un repère orthonormé.

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[1, +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x-1} + 2$.

1. Etudier la dérivabilité de f à droite en 1 et interpréter.
2. Dresser le tableau de variation de f.
3. Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} que l'on déterminera.
4. Etudier la dérivabilité de f^{-1}.

6 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$f(x)=1+\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

1. Etudier les variations de f et montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0, 2[$.

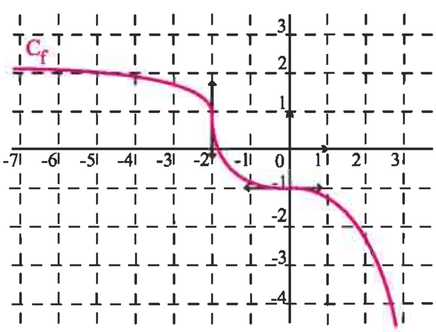
2. Expliciter $f^{-1}(x)$ pour $x \in]0, 2[$.

7 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{x+\sqrt{x}} & \text{si } x>0,\\ 0 & \text{si } x=0.\end{cases}$$

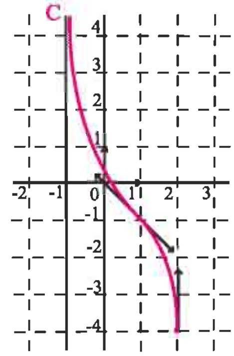
1. Etudier la continuité puis la dérivabilité de f à droite en 0.
2. a. Dresser le tableau de variation de f.
b. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $[0, 1[$.
c. Etudier la dérivabilité de f^{-1} sur $[0, 1[$.
3. Expliciter $f^{-1}(x)$ pour $x \in [0, 1[$.

8 Le graphique ci-dessous représente la courbe d'une fonction f bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.



On désigne par g la fonction réciproque de f.
1. Que peut-on dire de la dérivabilité de g en -1 et en 1 ?
2. Dresser le tableau de variation de g.
3. Reproduire la courbe de f et représenter dans le même repère la courbe de g.

9 Le graphique ci-dessous représente la courbe C d'une fonction f bijective de $]-1, 2]$ sur $[-4, +\infty[$.
La courbe C admet une asymptote verticale d'équation $x=-1$.



On désigne par g la fonction réciproque de f.
1. Que peut-on dire de la dérivabilité de g en -1 et en -4 ?
2. Dresser le tableau de variation de g.
3. Que peut-on dire de la limite de g en $+\infty$.

10 Soit f la fonction définie sur l'intervalle $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ par $f(x)=\tan x$.

1. Montrer que f réalise une bijection de $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que f^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $\left(f^{-1}\right)'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$, $x \in \mathbb{R}$.

11 Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0, \pi]$ par $f(x)=2\cos x+3$.

1. Dresser le tableau de variation de f.
2. Montrer que f réalise une bijection de $[0, \pi]$ sur un intervalle I que l'on déterminera.
3. On note g la fonction réciproque de f.
a. Calculer $g(5)$, $g(3)$ et $g(1)$.
b. Montrer que g est dérivable sur l'intervalle $]1, 5[$ et expliciter $g'(x)$.

12 Soit f la fonction définie sur l'intervalle $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right[$ par $f(x)=\frac{1}{\sin x}$.

1. Montrer que f réalise une bijection de $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right[$ sur $[1, +\infty[$.

2. Calculer $f^{-1}\left(\sqrt{2}\right)$ et $f^{-1}\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$.

3. Etudier la continuité et la dérivabilité de f^{-1} sur $[1, +\infty[$.

4. Calculer $\left(f^{-1}\right)'(x)$, pour $x \in]1, +\infty[$.

13 Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ par $f(x)=1-\tan x$.

1. Dresser le tableau de variation de f.
2. Montrer que f réalise une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ sur $\mathbb{R}$.
3. Calculer $f^{-1}(0)$ et $f^{-1}(2)$.
4. Montrer que f^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $\left(f^{-1}\right)'(x)=\frac{1}{-x^2+2x-2}$, pour tout réel x.
5. Etudier la nature des branches infinies de la courbe de f^{-1}.

14 Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ par $f(x)=\sqrt{\cos x}$.

1. Etudier la dérivabilité de la fonction f en $\frac{\pi}{2}$ à gauche et interpréter.
2. a. Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $[0, 1]$.
b. Montrer, en utilisant la première question, que la fonction f^{-1} est dérivable en 0 à droite et préciser le nombre $\left(f^{-1}\right)'_d(0)$.
c. Préciser la demi-tangente à la courbe de f en son point d'abscisse 0 et en déduire que f^{-1} n'est pas dérivable à gauche en 1.
3. Montrer que f^{-1} est dérivable sur $]0, 1[$ et que $\left(f^{-1}\right)'(x)=\frac{-2x}{\sqrt{1-x^4}}$ pour tout $x \in]0, 1[$.

15 Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0, 1]$ par $f(x)=\cos\frac{\pi}{2}x$.

1. Etudier les variations de f et tracer sa courbe dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. (On précisera les demi-tangentes aux points d'abscisses 0 et 1).
2. Montrer que f réalise une bijection de $[0, 1]$ sur un intervalle I que l'on précisera.
3. Montrer que f^{-1} est dérivable sur $[0, 1[$ et que $\left(f^{-1}\right)'(x)=\frac{-2}{\pi\sqrt{1-x^2}}$, pour tout x de $[0, 1[$.

16 Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0, 1]$ par $f(x)=\frac{1}{1-\cos \pi x}$.

1. Etudier les variations de f et tracer sa courbe dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
2. a. Montrer que l'équation $f(x)=x$ admet une unique solution x_0 dans $]0, 1]$.
b. Calculer $f\left(\frac{2}{3}\right)$ et en déduire la valeur de x_0.
3. a. Montrer que f réalise une bijection de $]0, 1]$ sur $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$.
b. La fonction f^{-1} est-elle dérivable en $\frac{1}{2}$ à droite ?
c. Montrer que f^{-1} est dérivable sur $\left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$ et que $\left(f^{-1}\right)'(x)=\frac{-1}{\pi x\sqrt{2x-1}}$, pour tout $x \in \left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$.

17 Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[-1, 1]$ par $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2+x+1}$.

1. Montrer que f réalise une bijection de $[-1, 1]$ sur un intervalle I que l'on précisera.
2. Soit g la fonction définie sur $[-1, 1]$ par $g(x)=f(x)-x$.
a. Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution α dans $]-1, 1[$.
b. Vérifier que $\alpha \in \left]\dfrac{2}{3}, 1\right[$.
c. En déduire que la droite $\Delta : y = x$ coupe la courbe de f en un unique point.
3. La fonction f^{-1} est-elle dérivable en $\dfrac{2}{3}$?
4. a. Calculer $f\left(-\dfrac{1}{2}\right)$, $f(0)$ et $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$.
b. En déduire les nombres dérivés de f^{-1} en $\dfrac{5}{3}$, en 1 et en $\dfrac{5}{7}$.

18 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}-1$.

1. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle I que l'on précisera.
2. a. Montrer que l'équation $f(x)=x$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$ et que $-2<\alpha<-1$.
b. En déduire le signe de $f(x)-x$.
3. Expliciter $f^{-1}(x)$ pour $x \in I$.
4. On considère la suite réelle (u_n) définie par $u_0=-1$ et $u_{n+1}=f(u_n)$, $n \in \mathbb{N}$.
a. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, $\alpha \le u_n \le -1$.
b. Montrer que (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

19 A/ Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[1, +\infty[$ par $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x}+1$.

1. a. Etudier la dérivabilité de f à droite en 1.
b. Dresser le tableau de variation de f.
c. Montrer que f réalise une bijection de $[1, +\infty[$ sur un intervalle I que l'on précisera.
2. a. La fonction f^{-1} est-elle dérivable à droite en 1 ?
b. Expliciter $f^{-1}(x)$ pour $x \in I$.

B/ On considère la fonction g définie par

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{f\left(\dfrac{1}{\cos x}\right)} & \text{si } x\in\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[,\\[2mm] \dfrac{1}{2} & \text{si } x=\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$$

1. a. Montrer que g est continue à gauche en $\dfrac{\pi}{2}$.
b. Vérifier que pour tout $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, $g(x)=\dfrac{1}{1+\sin x}$.
2. Montrer que g réalise une bijection de $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ sur un intervalle J que l'on précisera.
3. a. Montrer que g^{-1} est dérivable sur $\left]\dfrac{1}{2}, 1\right]$ et calculer $\left(g^{-1}\right)'(x)$.
b. La fonction g^{-1} est-elle dérivable à droite en $\dfrac{1}{2}$?

20 1. Simplifier les nombres ci-dessous.

$x=\dfrac{\sqrt[3]{3}.\sqrt[3]{27}.\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{81}}$; $y=\dfrac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{32}}$; $t=\sqrt[3]{8^2}$.

2. a. Développer $\left(2+\sqrt{5}\right)^3$.
b. Simplifier $\sqrt[3]{38+17\sqrt{5}}-\sqrt[3]{17\sqrt{5}-38}$.

21 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations ci-dessous.

1. $\sqrt[3]{x}=\sqrt[4]{2}$.
2. $\sqrt[5]{x^2}=\sqrt[3]{3}$.
3. $\sqrt[3]{x^2}-3\sqrt[3]{x}+2=0$.
4. $\left(1-\sqrt[4]{x}\right)^3+8=0$.

22 Calculer les limites ci-dessous.

$\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt[3]{x^2-x+1}$; $\lim\limits_{x\to+\infty} x-\sqrt[3]{x}$; $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{2}}{x-2}$;

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt[3]{x}-\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x}}$.

23 Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x)=x+\sqrt[3]{x}$.

1. Etudier la dérivabilité de f à droite en 0 et interpréter.
2. Dresser le tableau de variation de f.
3. Etudier la branche infinie de la courbe de f.
4. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$.
5. Calculer $f(1)$, $f(8)$, $\left(f^{-1}\right)'(2)$ et $\left(f^{-1}\right)'(10)$.

24 Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x)=x\sqrt[4]{x}$.

1. Etudier la dérivabilité de f à droite en 0 et interpréter.
2. Dresser le tableau de variation de f.
3. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ et interpréter.
4. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$.
5. Expliciter $f^{-1}(x)$ pour $x \in \mathbb{R}_+$.

Chapitre 5

Etudes de fonctions

Euler (1707-1783) définit une fonction d'une quantité variable comme " une expression analytique composée d'une manière quelconque de cette quantité variable et de nombres ou de quantités constantes". En fait Euler donne une classification des fonctions en deux types: algébriques (fonctions rationnelles et irrationnelles), transcendantes (fonctions trigonométriques, logarithmes, exponentielles, puissances).

Chapitre 5

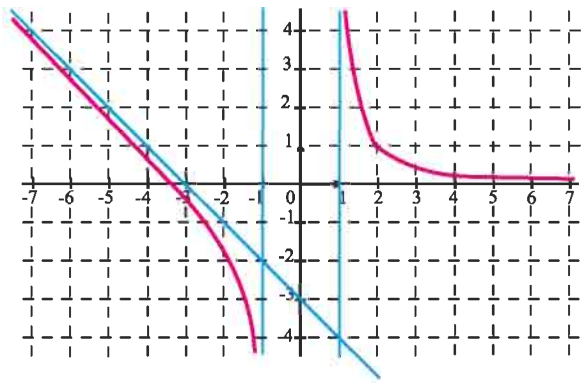
Etudes de fonctions

I. Branches infinies

Soit f une fonction et C_f sa courbe représentative dans un repère orthogonal.
On dit que C_f admet une branche infinie dès que l'une des coordonnées d'un point de C_f tend vers l'infini.

Activité 1

La courbe ci-contre est la représentation graphique d'une fonction f définie sur $]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$. Les droites d'équations $x=-1$, $x=1$, $y=0$ et $y=-x-3$ sont des asymptotes à cette courbe.
Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)+x+3$
$\lim\limits_{x\to(-1)^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.



Nous avons résumé dans le tableau ci-dessous la nature de certaines branches infinies vues en $3^{ème}$ année.

f	C_f
$\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=+\infty$ ou $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=-\infty$. $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=+\infty$ ou $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=-\infty$.	La droite $D: x=a$ est asymptote à C_f.
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=L$ ou $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=L$. (L réel)	La droite $D: y=L$ est asymptote à C_f.
$\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x)-(ax+b))=0$ ou $\lim\limits_{x\to-\infty} (f(x)-(ax+b))=0$.	La droite $D: y=ax+b$ est asymptote à C_f.

Activité 2

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\sqrt{x^2+x+1}$.
On désigne par C_f la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

1. a. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

   b. Montrer que pour tout réel strictement positif x, $f(x)=x\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}$.

   c. En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$.

2. a. Montrer que pour tout réel strictement positif x, $f(x)-x=\dfrac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1}$.

   b. En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-x$. Interpréter graphiquement.

3. Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)+x$. Interpréter graphiquement.

• Soit f une fonction telle que $f(x)$ tend vers l'infini, lorsque x tend vers l'infini. On désigne par C_f sa courbe dans un repère orthogonal $(O,\vec{i},\vec{j})$. Alors la branche infinie de C_f dépend de la limite de $\frac{f(x)}{x}$, lorsque x tend vers l'infini.

Nous donnons dans le tableau ci-dessous un procédé de détermination de la branche infinie de C_f dans le cas où $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ est infinie. Les autres cas se déterminent de façon analogue.

* Si $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ est infinie, alors C_f admet une branche parabolique de direction $(O,\vec{j})$ au voisinage de $+\infty$.

* Si $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}=0$, alors C_f admet une branche parabolique de direction $(O,\vec{i})$ au voisinage de $+\infty$.

* Si $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}=a$ $(a\in\mathbb{R}^*)$ alors deux cas peuvent se présenter selon $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x)-ax)$.

• Si $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x)-ax)=b$ $(b\in\mathbb{R})$ alors la droite d'équation $y=ax+b$ est une asymptote oblique à la courbe C_f au voisinage de $+\infty$.

• Si $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x)-ax)$ est infinie alors la droite d'équation $y=ax$ est une direction asymptotique à la courbe C_f au voisinage de $+\infty$.

Activité 3

Soit f la fonction définie sur $[-1,+\infty[$ par $f(x)=2x+\sqrt{x+1}$ et C_f la courbe de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

Déterminer la nature de la branche infinie de C_f au voisinage de $+\infty$.

Activité 4

Soit f la fonction définie sur $]-1,+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{x^2+x-1}{x+1}$ et C_f la courbe de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

Etudier les branches infinies de C_f.

II. Eléments de symétrie

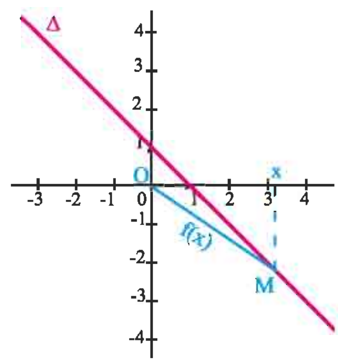
Activité 1

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

Soit Δ la droite d'équation $y=1-x$.

A tout réel x, on associe le point M de Δ d'abscisse x et on désigne par f la fonction définie par $f(x)=OM$.

Soit C_f la courbe représentative de f dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.



1. Montrer que $f(x)=\sqrt{x^2+(1-x)^2}$.
2. Montrer que la droite $\Delta : x=\dfrac{1}{2}$ est un axe de symétrie de C_f.
3. Montrer que la droite Δ' d'équation $y=\sqrt{2}x-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ est une asymptote à la courbe C_f au voisinage de $+\infty$.

Soit f une fonction définie sur D.
On désigne par C_f sa courbe représentative dans un repère orthogonal.
La droite $\Delta : x=a \ (a\in\mathbb{R})$ est un axe de symétrie pour C_f si pour tout x de D, $\begin{cases}(2a-x)\in D,\\ f(2a-x)=f(x).\end{cases}$

Activité 2

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x)=\begin{cases} 2-\sqrt{2-x} & \text{si } x<1, \\ \sqrt{x} & \text{si } x\geq 1. \end{cases}$$

On désigne par C_f la courbe de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Montrer que le point $I(1, 1)$ est un centre de symétrie de C_f.
2. Montrer que f est dérivable en 1.
3. Donner une équation de la tangente T en I à C_f.
4. Montrer que I est un point d'inflexion de C_f.
5. Donner la position relative de T et C_f.

Le plan est muni d'un repère orthogonal $(O,\vec{i},\vec{j})$. Soit f une fonction définie sur un ensemble D, de courbe représentative C et O' le point de coordonnées (a,b).

Le point O' est un centre de symétrie de C, si pour tout x appartenant à D, $2a-x$ appartient à D et $f(2a-x)=2b-f(x)$.

III. Exemples d'étude de fonctions

Exemple 1

Soit la fonction $f: x \mapsto \frac{1}{8}x^3+x-4$ et C_1 sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. Etudier les branches infinies de C_1.
2. a. Expliciter $f'(x)$, pour tout réel x.

   b. Montrer que C_1 admet un point d'inflexion I.

   c. Donner une équation de la tangente T à C_1 au point I.
3. Dresser le tableau de variation de f.
4. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.
5. Représenter dans le même repère orthonormé les courbes respectives C_1 et C_2 de f et f^{-1}.

Solution

1. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{8}x^3+x-4=+\infty \text{ et } \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{8}x^3+x-4=-\infty.$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{8}x^3+x-4}{x}=\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{8}x^2=+\infty \text{ et } \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{8}x^2=+\infty.$$

On en déduit que la courbe de f admet deux branches paraboliques de direction $(O,\vec{j})$.

2. a. La fonction polynôme f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Le calcul donne $f'(x)=\frac{3}{8}x^2+1$.

b. La fonction f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f''(x)=\frac{3}{4}x$, pour tout réel x.

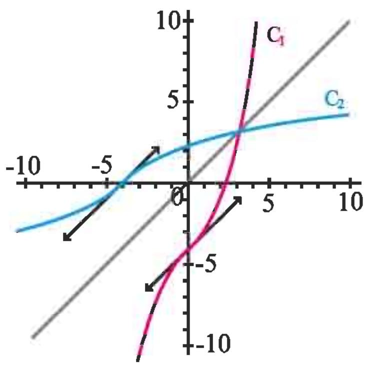
La fonction f'' s'annule en 0 en changeant de signe. On en déduit que le point $I(0,-4)$ est un point d'inflexion de C_1.

c. Des égalités $f(0)=-4$ et $f'(0)=1$, on déduit que T à pour équation $y=x-4$.

3. **Tableau de variation de f.**

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		+	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

5. **Représentation graphique de f et de f^{-1}.**



4. La fonction continue f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Elle réalise une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur $f(\mathbb{R})$.

De plus, $f(\mathbb{R})=\left]\lim\limits_{x\to-\infty} f, \lim\limits_{x\to+\infty} f\right[=\mathbb{R}$.

Ce qui prouve le résultat.

Exemple 2

Soit la fonction $f: x \mapsto \frac{2x^2+x-4}{x-1}$.

1. Vérifier que $f(x)=2x+3-\frac{1}{x-1}$, $x \neq 1$.
2. Etudier la fonction f et tracer sa courbe dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
3. Montrer que pour tout réel k, l'équation $f(x)=k$ admet exactement deux solutions.

Solution

1. On peut écrire pour tout $x \neq 1$, $2x+3-\frac{1}{x-1}=\frac{(2x+3)(x-1)-1}{x-1}=\frac{2x^2+x-4}{x-1}$.

2. **Etude de f.**

• **Limites aux bornes de l'ensemble de définition.**

La fonction rationnelle f est définie sur $]-\infty,1[\cup]1,+\infty[$.

De plus, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x^2+x-4}{x-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}2x=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x^2+x-4}{x-1}=\lim\limits_{x\to-\infty}2x=-\infty$.

De même, $\lim\limits_{x\to1^+}2x+3-\frac{1}{x-1}=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to1^-}2x+3-\frac{1}{x-1}=+\infty$.

- **Etude des branches infinies.**

La courbe C de f admet la droite $x=1$ comme asymptote.

D'autre part, $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-2x-3)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-1}{x-1}=0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-2x-3)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-1}{x-1}=0$.

Ce qui prouve que la droite d'équation $y=2x+3$ est une asymptote à la courbe C de f, au voisinage de l'infini.

- **Tableau de variation.**

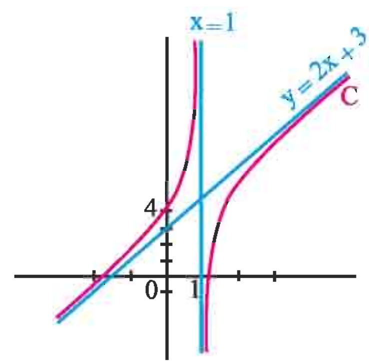
La fonction rationnelle f est dérivable en tout réel de son ensemble de définition.

Le calcul donne $f'(x)=2+\dfrac{1}{(x-1)^2}$. Ce qui prouve que f est strictement croissante sur $]-\infty,\ 1[$ et sur $]1,\ +\infty[$.

Tableau de variation

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$+$	
f	$-\infty$	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

Représentation graphique



3. La fonction f est continue et strictement croissante sur chacun des intervalles $]-\infty,1[$ et $]1,+\infty[$.

On en déduit que $f(]-\infty,1[)=\left]\lim\limits_{x\to-\infty}f,\ \lim\limits_{x\to1^-}f\right[=\mathbb{R}$ et $f(]1,+\infty[)=\left]\lim\limits_{x\to1^+}f,\ \lim\limits_{x\to+\infty}f\right[=\mathbb{R}$.

Ce qui prouve que pour tout réel k, l'équation $f(x)=k$ admet exactement deux solutions x_1 et x_2 appartenant respectivement à $]-\infty,1[$ et $]1,+\infty[$.

Exemple 3

Soit la fonction $f: x \mapsto \dfrac{1}{(x+3)(x-2)}$.

1. Vérifier que $f(x)=\dfrac{1}{5(x-2)}-\dfrac{1}{5(x+3)}$, $x\neq-3$ et $x\neq2$.
2. Etudier la fonction f et tracer sa courbe dans un repère orthogonal $(O,\vec{i},\vec{j})$.
3. Etudier, graphiquement, suivant les valeurs du réel k, les solutions de l'équation $f(x)=k$.

Solution

1. On peut écrire $\dfrac{1}{5(x-2)}-\dfrac{1}{5(x+3)}=\dfrac{(x+3)-(x-2)}{5(x-2)(x+3)}=\dfrac{1}{(x-2)(x+3)}$, $x \neq -3$ et $x \neq 2$.

2. **Etude de f.**

• **Limites aux bornes de l'ensemble de définition**

La fonction rationnelle f est définie sur $]-\infty,-3[\cup]-3, 2[\cup]2,+\infty[$.

De plus, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{(x+3)(x-2)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^2}=0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{(x+3)(x-2)}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x^2}=0$.

De même,

$\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{1}{5(x-2)}-\dfrac{1}{5(x+3)}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{1}{5(x-2)}-\dfrac{1}{5(x+3)}=-\infty$.

$\lim\limits_{x\to-3^+}\dfrac{1}{5(x-2)}-\dfrac{1}{5(x+3)}=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to-3^-}\dfrac{1}{5(x-2)}-\dfrac{1}{5(x+3)}=+\infty$.

• **Etude des branches infinies**

La courbe C de f admet les droites d'équations $x=-3$ et $x=2$ comme asymptotes.

D'autre part, la droite d'équation $y=0$ est asymptote à la courbe C de f, au voisinage de l'infini.

• La fonction rationnelle f est dérivable sur son ensemble de définition.

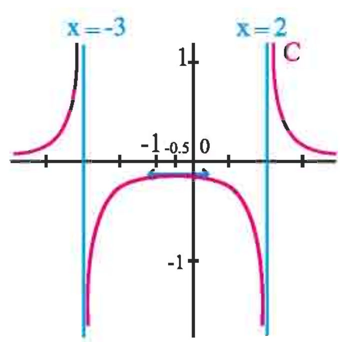
Le calcul donne $f'(x)=-\dfrac{1}{5(x-2)^2}+\dfrac{1}{5(x+3)^2}=\dfrac{-2x-1}{(x-2)^2(x+3)^2}$, $x \neq 2$ et $x \neq -3$.

Ce qui prouve que $f'(x) \geq 0$, si et seulement si, $x \leq -0.5$ et $x \neq -3$.

Tableau de variation de f

x	$-\infty$		-3		-0.5		2		$+\infty$
$f'(x)$		+	||	+	0	−	||	−	
f	0	↗	$+\infty$ || $-\infty$	↗	-0.16	↘	$-\infty$ || $+\infty$	↘	0

Représentation graphique de f



3. Déterminer le nombre de solutions de l'équation $f(x)=k$ revient à déterminer le nombre de points d'intersection de la courbe de f avec la droite d'équation $y=k$.

Si $k<-0.16$ ou $k>0$, il y a deux points d'intersection.

Si $k=-0.16$, il y a un unique point d'intersection.

Si $-0.16<k\leq 0$, il n'y a aucun point d'intersection.

Exemple 4

Soit la fonction $f : x \mapsto x+\sqrt{x^2-1}$ et C sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. Déterminer l'ensemble D de définition de f.
2. a. Montrer que $f(x)f(-x)=-1$, pour tout réel x de D.

   b. En déduire que $f(x)\neq 0$, pour tout réel x de D.

   c. Etudier la limite de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

   d. Montrer que la droite $\Delta : y=2x$ est asymptote à C.
3. Montrer que $f'(x)=\dfrac{f(x)}{\sqrt{x^2-1}}$, $x\in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$.
4. Etudier la dérivabilité de f à droite en 1 et à gauche en -1.
5. dresser le tableau de variation de f et tracer C.

Solution

1. La fonction f est définie pour tout réel x tel que $x^2-1\geq 0$.
On en déduit que $D=]-\infty,-1]\cup[1,+\infty[$.

2. a. On peut écrire $f(x)f(-x)=\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)\left(-x+\sqrt{x^2-1}\right)=-1$, $x\in D$.

b. Cela résulte de l'égalité $f(x)f(-x)=-1$, pour tout réel x de D.

c. Les égalités $\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2-1}=+\infty$ donnent $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

D'autre part l'égalité $f(x)f(-x)=-1$, valable pour tout réel x de D implique que

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{-1}{f(-x)}=0.$$

d. Le calcul donne $f(x)-2x=-x+\sqrt{x^2-1}=\dfrac{-1}{x+\sqrt{x^2-1}}$, $x\in D$.

On en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-2x\right)=0$. Ce qui prouve que la droite $\Delta : y=2x$ est asymptote à C.

3. Il est clair que la fonction f est dérivable sur chacun des intervalles $]-\infty,-1[$ et $]1,+\infty[$ comme somme de fonctions dérivables.

De plus, $f'(x)=1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}=\dfrac{f(x)}{\sqrt{x^2-1}}$ pour tout réel x de $]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$.

4. Pour tout $x>1$, $\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\dfrac{x-1+\sqrt{x^2-1}}{x-1}=1+\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x-1}=1+\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2-1}}$.

Ce qui implique que $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = +\infty$.

De même , on vérifie que pour $x < -1$, $\dfrac{f(x)-f(-1)}{x+1} = 1 + \dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-1}}$.

Par suite $\lim\limits_{x \to -1^-} \dfrac{f(x)-f(-1)}{x+1} = -\infty$.

5. La fonction continue f ne s'annule sur aucun des intervalles $]-\infty, -1]$ et $[1, +\infty[$.

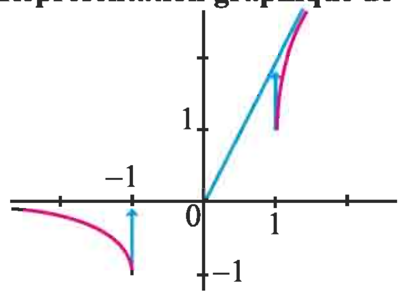
On en déduit qu'elle garde un signe constant sur chacun des intervalles $]-\infty, -1]$ et $[1, +\infty[$. Ce qui prouve que $f(x)$ est du signe de $f(1)$ pour $x \geq 1$ et $f(x)$ est du signe de $f(-1)$ pour $x \leq 1$.

Il en résulte que $f'(x) > 0$, si et seulement si, $x > 1$.

Tableau de variation de f

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖		‖	$+$	
f	0	$\searrow$	-1		1	$\nearrow$	$+\infty$

Représentation graphique de f



Exemple 5

Soit la fonction $f : x \mapsto \dfrac{4\sin x}{2+\cos x}$.

1. a. Déterminer l'ensemble de définition de f.
   b. Etudier la parité de f et vérifier que 2π est une période de f.
2. .Etudier les variations de f sur $[0, \pi]$.
3. Tracer, dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, la courbe de la restriction de f à $[-2\pi, 2\pi]$

Solution

1. a. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$, car $2+\cos x \neq 0$ pour tout réel x.

b. On vérifie facilement que f est impaire et que 2π est une période de f.

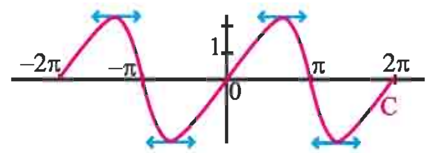
2. La fonction f est dérivable comme quotient de fonctions dérivables tel que le dénominateur ne s'annule pas. De plus, $f'(x) = \dfrac{4(2\cos x + 1)}{(2+\cos x)^2}$, pour tout réel x de $[0, \pi]$.

On en déduit que $f'(x) \geq 0$, si et seulement si, $x \in \left[0, \dfrac{2\pi}{3}\right]$.

Tableau de variation de f sur $[0,\pi]$.

x	0		$\frac{2\pi}{3}$		π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	$\frac{4}{\sqrt{3}}$	$\searrow$	0

3. **Représentation graphique de f sur $[-2\pi, 2\pi]$.**



Exemple 6

Soit f la fonction définie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ par $f(x) = \sin x - \frac{2}{\pi}x$.

1. a. Etudier les variations de f' et en déduire qu'il existe un unique réel α de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ tel que $f'(x) \geq 0$, si et seulement si, $x \in [0, \alpha]$.

   b. En utilisant la touche $\cos^{-1}$ de la calculatrice, donner une valeur approchée à 10^{-4} près de α.
2. Dresser le tableau de variation de f, en déduire le signe de f.
3. Tracer la courbe de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Solution

1. a. La fonction f est dérivable comme somme de fonctions dérivables sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

et $f'(x) = \cos x - \frac{2}{\pi}$, pour tout réel x de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

La fonction f' est dérivable sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et $f''(x) = -\sin x$, pour tout réel x de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

On en déduit que $f''(x) \leq 0$, pour tout réel x de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Tableau de variation de f'.

x	0		$\frac{\pi}{2}$
$f''(x)$	0	$-$	
f'	$1-\frac{2}{\pi}$	$\searrow$	$\frac{-2}{\pi}$

La fonction f' réalise une bijection strictement décroissante de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ sur $\left[-\frac{2}{\pi}, 1-\frac{2}{\pi}\right]$.

Les réels $-\frac{2}{\pi}$ et $1-\frac{2}{\pi}$ étant de signe contraire, il existe alors un unique réel α de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, tel que $f'(\alpha)=0$.

On en déduit que $f'(x) \geq 0$, si et seulement si, $x \in [0, \alpha]$.

b. Le réel α est l'unique solution dans $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ de l'équation $\cos(x)=\frac{2}{\pi}$.

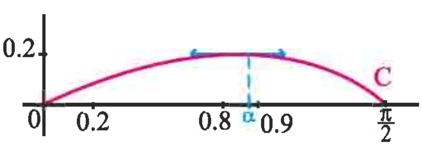
En utilisant la touche $\cos^{-1}$ de la calculatrice, on obtient $\alpha \simeq 0.88068923$, On en déduit que 0.8807 est une valeur approchée à 10^{-4} près de α.

3. La calculatrice donne, $f(\alpha) \simeq 0.21051366$.

Tableau de variation de f.

x	0		α		$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	0

Représentation graphique de f.



QCM

Nous avons représenté ci-contre le tableau de variation d'une fonction f.
Cocher la réponse exacte.

x	$-\infty$		-1		-0.5		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$-$	
f	2	↘	0	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	3	↘	-5

1. ☐ 0 est un minimum relatif de f.
   ☐ -1 est un minimum relatif de f.
   ☐ -5 est un minimum relatif de f.

2. ☐ La fonction f est croissante sur $[-1, 0]$.
   ☐ La fonction f est croissante sur $[-1, -0.5[$ et sur $]-0.5, 0]$.
   ☐ La fonction f est décroissante sur $]-\infty, -0.5]$.

3. La courbe de f admet pour asymptote la droite d'équation
   ☐ $x = 2$. ☐ $x = -0.5$. ☐ $x = -5$.

4. La courbe de f admet pour asymptote la droite d'équation
   ☐ $y = 2$. ☐ $y = -0.5$. ☐ $y = -1$.

5. La courbe de f et l'axe des abscisses ont
   ☐ un point commun. ☐ deux points communs. ☐ trois points communs.

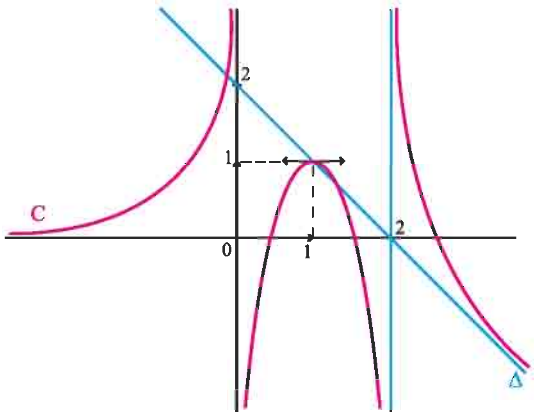
VRAI - FAUX

Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse.

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle $]a-h, a+h[$, $(h>0)$ et admettant une dérivée seconde continue.

1. Si $f''(a) = 0$ alors la courbe de f admet un point d'inflexion d'abscisse a.
2. Si f' est décroissante sur $]a-h, a[$ et croissante sur $[a, a+h[$ alors la courbe de f admet un point d'inflexion d'abscisse a.
3. Si f' est croissante sur $]a-h, a+h[$ alors f est croissante sur $]a-h, a+h[$.
4. Si f'' est négative sur $]a-h, a+h[$ alors f est décroissante sur $]a-h, a+h[$.

1 La courbe ci-dessous est la représentation graphique d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}\setminus\{0,2\}$. La droite Δ et les droites d'équations respectives $x=0$, $x=2$ et $y=0$ sont des asymptotes à la courbe C.



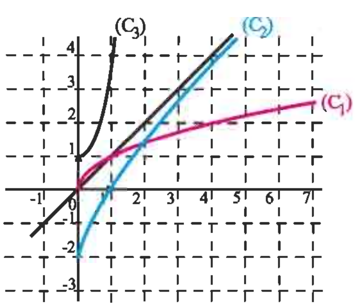
1. Déterminer graphiquement,

$\lim\limits_{-\infty} f$, $\lim\limits_{0^-} f$, $\lim\limits_{0^+} f$, $\lim\limits_{2^-} f$, $\lim\limits_{2^+} f$, $\lim\limits_{+\infty} f$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)+x-2$.

2. Dresser le tableau de variation de f.
3. Déterminer suivant les valeurs de m, le nombre de solutions de l'équation $f(x)=m$.

2 On a représenté trois fonctions f, g et h définies sur l'intervalle $[0,+\infty[$ par

$f(x)=x^2+1$, $g(x)=\sqrt{x}$ et $h(x)=x-\frac{2}{x+1}$.



1. Identifier pour chaque fonction sa courbe représentative.
2. Préciser pour chaque courbe la nature de sa branche infinie.

3 Le plan est muni d'un repère orthogonal $(O,\vec{i},\vec{j})$. Déterminer la nature des branches infinies de la courbe de f dans chacun des cas ci-dessous.

1. $f: x \mapsto 2x-3\sqrt{x-1}$.
2. $f: x \mapsto \frac{1}{x}-\sqrt{x+2}$.
3. $f: x \mapsto x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$.

4 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x+\sqrt{x^2+1}$ et on désigne par $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. Montrer que l'axe des abscisses est une asymptote à $\mathscr{C}$ en $-\infty$.
2. Montrer que la droite d'équation $y=2x$ est une asymptote à $\mathscr{C}$ en $+\infty$.

5 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x)=\begin{cases} x^2-2x+4 & \text{si } x\leq 1,\\ \frac{1}{x}+x+1 & \text{si } x>1.\end{cases}$$

1. Montrer que f est dérivable en 1 et préciser $f'(1)$.
2. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer f'.
3. Dresser le tableau de variation de f et construire la courbe de f dans un repère orthonormé.

6 1. Soit la fonction $f: x \mapsto \frac{x^2}{3}+\frac{9}{4x}$.

2. Déterminer l'ensemble de définition de f.
3. Dresser le tableau de variation de f.
4. Etudier les branches infinies.
5. Construire la courbe de f dans un repère orthonormé.
6. En déduire la construction de la courbe d'équation $y=\left|\frac{x^2}{3}+\frac{9}{4x}\right|$.

7 Soit la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x^3}{(x-1)^2}$.

1. Déterminer $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(f(x) - x - 2\right)$ et interpréter les résultats obtenus.
2. Etudier les variations de f et tracer sa courbe représentative dans un repère orthogonal du plan.

8 Soit la fonction

$f : x \mapsto \dfrac{x^3 + 3x^2 + 3x + 5}{(x+1)^2}$, $x \neq -1$.

1. Déterminer les réels a, b et c tels que

$f(x) = ax + b + \dfrac{c}{(x+1)^2}$, $x \neq -1$.

2. Dresser le tableau de variation de f.
3. Soit C la courbe de f dans un repère orthonormé.
a. Montrer que C admet, au voisinage de l'infini, une asymptote D que l'on déterminera.
b. Etudier la position relative de C et D.
c. Tracer D et C.

9 Soit la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x^2 - 2x + 3}{x - 1}$, $x \neq 1$ et C la courbe de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Déterminer les réels a, b et c tels que

$f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x-1}$, $x \neq 1$.

2. Dresser le tableau de variation de f.
3. Montrer que C admet un centre de symétrie.
4. a. Montrer que C admet une asymptote oblique D que l'on déterminera.
b. Etudier la position relative de C et D.
c. Tracer D et C.
5. Montrer que la restriction g de f à l'intervalle $\left[1+\sqrt{2}, +\infty\right[$ réalise une bijection de $\left[1+\sqrt{2}, +\infty\right[$ sur un intervalle que l'on précisera.

a. Dresser le tableau de variation de g^{-1}.
b. Résoudre l'équation g(x) = x. En déduire les coordonnées des points d'intersection des courbes C et C′, où C′ est la courbe de g^{-1} dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
c. Tracer la courbe C′.

10 Soit la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x}{\sqrt{3}} - \dfrac{\sqrt{3}}{x}$ et C la courbe de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Etudier les variations de f et tracer C.
2. Soit S la symétrie orthogonale par rapport à la droite D d'équation $x = 1$.
Soit $M(x, y)$ un point du plan et $M'(x', y')$ son symétrique par rapport à D.
a. Exprimer les coordonnées de M′, à l'aide de celles de M.
b. Trouver l'équation de la courbe C′ image de C par S.
c. Déterminer les points communs à C et C′.
d. Tracer C′ dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

11 Soit la fonction $f : x \mapsto |x+1| + \dfrac{x}{x^2 - 1}$ et C la courbe de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Préciser l'ensemble de définition de f.
2. Dresser le tableau de variation de f.
3. Déterminer les asymptotes de C.
4. Etudier la position relative de C et de ses asymptotes obliques.
5. Donner l'équation de la tangente à C au point d'abscisse 0 et préciser la position de C par rapport à cette tangente sur l'intervalle $]-1, 1[$.
6. Tracer C.

12 Soit la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x^4 - 6x^2 + 1}{x^3 - x}$ et C la courbe de f dans un repère orthonormé.

1. a. Préciser l'ensemble de définition de f.
b. Déterminer les réels a, b et c tels que

$f(x) = x + \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{x-1} + \dfrac{c}{x+1}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$.

2. Dresser le tableau de variation de f.
3. Déterminer les asymptotes à la courbe C.
4. Résoudre les équations $f(x) = 0$ et $f(x) = x$.
5. Montrer que C possède un centre de symétrie et tracer C.
6. Soit k un réel et P_k la fonction polynôme défini par

$P_k(x) = x^4 - kx^3 - 6x^2 + kx + 1$.

Vérifier que l'équation $P_k(x) = 0$ admet, quelque soit le réel k, quatre racines réelles distinctes.

13 Soit la fonction $f : x \mapsto \dfrac{3x^2 - x - 2}{x^2 - x - 2}$ et C la courbe de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Préciser l'ensemble de définition de f.
2. Dresser le tableau de variation de f.
3. Déterminer les asymptotes à la courbe C et tracer C.
4. Discuter graphiquement, suivant les valeurs du réel m, le nombre et le signe des solutions de l'équation $(3-m)x^2 + (m-1)x + 2(m-1) = 0$.
5. Soit g la restriction de f à l'intervalle $]2, +\infty[$.
a. Montrer que la fonction g admet une fonction réciproque g^{-1} dont on précisera l'ensemble de définition.
b. Tracer la courbe de g^{-1} dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

14 Soit la fonction $f : x \mapsto \dfrac{(x+1)^3}{(x-1)^2}$, $x \neq 1$.

1. Vérifier que $f(x) = x + 5 + \dfrac{12}{x-1} + \dfrac{8}{(x-1)^2}$, $x \neq 1$.
2. Dresser le tableau de variation de f.
3. Soit $\mathscr{C}$ la courbe de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
a. Montrer que $\mathscr{C}$ admet une asymptote oblique D que l'on déterminera.
b. Déterminer les coordonnées des points d'intersection A et B de la courbe $\mathscr{C}$ avec les droites d'équations $x = 0$ et $y = x + 5$.
c. Donner les équations des tangentes en A et en B à C.
d. Tracer ces tangentes et la courbe $\mathscr{C}$.

15 Soit la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x^2 - x + 1}$

On désigne par C_f la courbe représentative de f dans un repère orthogonal du plan.

1. a. Déterminer l'ensemble D de définition de la fonction f.
b. Montrer que pour tout réel de D,
$f(x) = \sqrt{\left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4}}$.
2. a. Montrer que la droite Δ d'équation $y = x - \dfrac{1}{2}$ est une asymptote à la courbe de f en $+\infty$.
b. Etudier la position de la courbe de f par rapport à la droite Δ.
3. Etudier la nature de la branche infinie de C_f en $-\infty$.
4. Tracer C_f et Δ.

16 Soit la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x^2 + 3x - 4}$ et C la courbe de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Préciser l'ensemble de définition de f.
2. Etudier la dérivabilité de f à gauche en -4 et à droite en 1.
Interpréter graphiquement les résultats obtenus.
3. Etudier la dérivabilité de f sur chacun des intervalles $]-\infty, -4[$ et $]1, +\infty[$ et déterminer f'.
4. Dresser le tableau de variation de f.
5. Etudier les branches infinies.
6. a. Tracer C.
b. En déduire la représentation de la courbe d'équation $x^2 - y^2 + 3x - 4 = 0$.

17 Soit la fonction $f : x \mapsto x^2 - 32\sqrt{x} + 31$ et C la courbe de f dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$. (On prendra 1cm comme unité sur l'axe des abscisses et 2mm sur l'axe des ordonnées).

1. Etudier la dérivabilité de f à droite en 0.
2. Dresser le tableau de variation de f.
3. Tracer C.
4. En déduire la courbe représentative de la fonction $g : x \mapsto x^2 - 32\sqrt{|x|} + 31$.

18 Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $g(x) = x\sqrt{x} + 10$.

1. Montrer que g est dérivable à droite en 0.
2. Calculer $g'(x)$, $x > 0$.
3. Dresser le tableau de variation de g.
4. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{g(x)}{x}$.
5. Représenter g dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

19 Soit la fonction $f : x \mapsto \dfrac{2+\sqrt{4-x^2}}{x}$ et C la courbe de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. Préciser l'ensemble de définition de f.
2. Etudier la dérivabilité de f en 2 à gauche et interpréter graphiquement le résultat.
3. Etudier la dérivabilité de f sur $]0,2[$ et déterminer f'.
4. Dresser le tableau de variation de f.
5. a. Déterminer les points d'intersection de C et de la droite D d'équation $y = x$.
b. Tracer C.
6. Soit g la restriction de f à $]0,2]$.
a. Montrer que g réalise une bijection de $]0,2]$ sur un intervalle I que l'on précisera.
b. Expliciter $g^{-1}(x)$, $x \in I$.
c. Tracer la courbe C' de g^{-1} dans $(O,\vec{i},\vec{j})$.

20 Soit la fonction $f : x \mapsto \dfrac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}$ et C la courbe de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. Dresser le tableau de variation de f.
2. Montrer que le point d'intersection I de C avec l'axe des abscisses est un centre de symétrie de C.
3. Existe-t-il des points de C où la tangente est parallèle à la droite d'équation $y = 1.5x$
Si oui, donner les équations de ces tangentes.
4. Tracer C.
5. a. Montrer que la fonction f admet une fonction réciproque f^{-1}.
b. Tracer la courbe de f^{-1} dans $(O,\vec{i},\vec{j})$.
c. Calculer $\left(f^{-1}\right)'(1)$.

21 I. Soit la fonction $f : x \mapsto -\dfrac{1}{2}+\dfrac{x}{2\sqrt{x^2+1}}$ et C la courbe de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. Dresser le tableau de variation de f.
2. Montrer que la fonction f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle que l'on précisera.

II. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par
$g(x) = -\dfrac{1}{2}x+1+\dfrac{1}{2}\sqrt{x^2+1}$.

1. Dresser le tableau de variation de g.
2. Déterminer les asymptotes à la courbe C' de g et étudier la position de C' par rapport à ses asymptotes.
a. Tracer C'.
b. Montrer que g réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle I que l'on précisera.
c. Vérifier que $g^{-1}(x) = \dfrac{1}{4x-4}+1-x,\ x \in I$.
d. Tracer la courbe de g^{-1} dans $(O,\vec{i},\vec{j})$.

22 Soit la fonction $f : x \mapsto 1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ et C la courbe de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. Dresser le tableau de variation de f.
2. a. Montrer que C admet un point d'inflexion A dont on déterminera les coordonnées.
b. Ecrire une équation de la tangente T à C au point A.
c. Montrer que A est un centre de symétrie pour C.
d. Construire C.
3. a. Montrer que la fonction f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle I que l'on précisera.
b. Expliciter $f^{-1}(x)$ pour tout x de I.
c. Tracer la courbe de f^{-1} dans $(O,\vec{i},\vec{j})$.
d. Montrer que f^{-1} est dérivable et calculer $\left(f^{-1}\right)'(x)$.
4. Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution dans $\left[\sqrt{3},2\right]$.
5. On définit la suite réelle (u_n) par $\begin{cases} u_0 = 2, \\ u_{n+1} = f(u_n). \end{cases}$
a. Montrer que la suite (u_n) est décroissante.
b. Montrer que $\sqrt{3} \le u_n \le 2$, pour tout entier n.
c. En déduire que (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

23 Etudier et représenter graphiquement la fonction $f : x \mapsto \sin x + \frac{1}{2}\sin 2x$.

24 Etudier et représenter graphiquement la fonction $f : x \mapsto \frac{\cos x}{2\cos x - 1}$.

25 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin^2 x + \cos x$.
On désigne par C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
1. a. Montrer que 2π est une période de f.
b. Montrer que la droite des ordonnées est un axe de symétrie de C_f.
2. a. Etudier les variations de f.
b. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans $[0, \pi]$.
Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-1}.
c. Tracer la représentation graphique de la restriction de f à l'intervalle $[-\pi, 2\pi]$.

26 I. Etudier et représenter graphiquement la fonction $f : x \mapsto \frac{x^3}{(x-1)^2}$.

II. Soit la fonction $h : x \mapsto \frac{\sin^3 x}{(\sin x - 1)^2}$ et C_h sa courbe dans un repère orthonormé.
1. a. Déterminer l'ensemble de définition de h.
b. Vérifier que 2π est une période de h.
c. Montrer que la droite d'équation $x = \frac{\pi}{2}$ est un axe de symétrie pour C_h.
2. a. Déterminer $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} h(x)$.
b. En écrivant $h = f \circ \sin$, déduire le sens de variation de h sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.
c. Résoudre l'équation $h'(x) = 0$.
d. Montrer que l'origine du repère est un point d'inflexion de C_h.
3. Tracer C_h.

27 1. Etudier et représenter graphiquement la fonction $f : x \mapsto \frac{x(x+1)}{x-2}$.
2. Déterminer graphiquement, suivant les valeur de m, le nombre de solutions de l'équation
$x^2 + (1-m)x + 2m = 0$.
3. Déterminer graphiquement, suivant les valeur de m, le nombre de solutions de l'équation
$\cos^2 x + (1-m)\cos x + 2m = 0$ dans $[0, 2\pi[$.

Chapitre 6

Primitives

" Nous appellerons la fonction fx, fonction primitive, par rapport aux fonctions f'x, f''x, &c.qui en dérivent, et nous appellerons celles-ci, fonctions dérivées, par rapport à celle-là"

(Lagrange, 1797)
(Cité dans E.Haier et al, L'analyse au fil de l'histoire, 2000)

Chapitre 6

Primitives

I. Définition

Activité 1

Soit les fonctions f et F définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=3x^2+4x-1$ et $F(x)=x^3+2x^2-x+2$.
Vérifier que $F'=f$.
Déterminer une fonction G dérivable sur $\mathbb{R}$ et distincte de F telle que $G'=f$.

Définition

Soit f et F deux fonctions définies sur un intervalle I. On dit que F est une primitive de f sur I lorsque F est dérivable sur I et $F'(x)=f(x)$, pour tout x de I.

Activité 2

Dans chacun des cas ci-dessous, vérifier que la fonction F est une primitive de la fonction f sur l'intervalle I.

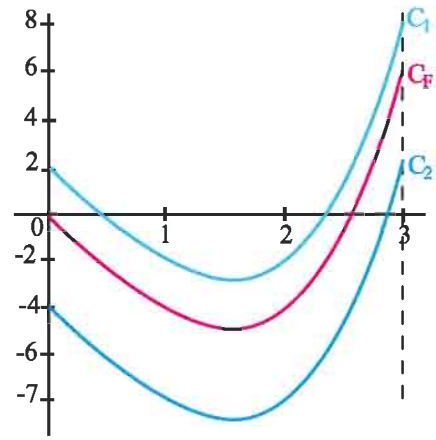
1. $F(x)=\frac{1}{x}$; $f(x)=-\frac{1}{x^2}$; $I=[1,+\infty[$.
2. $F(x)=x^2$; $f(x)=2x$; $I=\mathbb{R}$.
3. $F(x)=\tan x$; $f(x)=\frac{1}{\cos^2 x}$; $I=]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$.

Théorème (admis)

Toute fonction continue sur un intervalle I admet au moins une primitive sur I.

Activité 3

Dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O,\vec{i},\vec{j})$, on a représenté la courbe C_F de la fonction F définie sur $[0,3]$ par $F(x)=x^3-x^2-4x$.
Les courbes C_1, C_2 sont les images respectives de C_F par des translations de vecteurs colinéaires à $\vec{j}$.



On désigne par G_1, G_2 les fonctions de courbes respectives C_1, C_2.

1. Déterminer la dérivée f de F. Que représente F pour f ?
2. Déterminer G_1, G_2 .
3. Soit H une primitive de f sur $[0, 3]$. Justifier que la courbe de H est l'image de celle de F par une translation.

Théorème

Soit f une fonction continue sur un intervalle I . Si F et G sont deux primitives de f sur I, alors la fonction $F-G$ est constante sur I.

Démonstration

Les fonctions F et G étant des primitives de f sur I, il en résulte que $F'(x)-G'(x)=0$, pour tout x de I. Ce qui implique que $F-G$ est constante sur I.

Corollaire

Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Soit x_0 un réel de I et y_0 un réel. Alors il existe une unique primitive F de f sur I telle que $F(x_0)=y_0$.

Démonstration

L'unicité découle du théorème précédent.
D'autre part, soit G une primitive de f sur I.
La fonction F définie sur I par $F(x)=G(x)-G(x_0)+y_0$ est la primitive de f qui prend la valeur y_0 en x_0.

Activité 4

On considère les fonctions f, g et h définies sur $]0, +\infty[$ par

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{2}{(x+2)^2} \;;\; g: x \mapsto \sin x+\cos x \;;\; h: x \mapsto \sin x-\cos x.$$

Identifier parmi les fonctions suivantes celles qui sont des primitives sur $]0, +\infty[$ de l'une des fonctions précédentes.

$F_1: x \mapsto 2\sqrt{x}-\frac{2}{x+2}-4$; $F_2: x \mapsto \pi-\sin x-\cos x$; $F_3: x \mapsto -\sin x-\cos x-1$;

$F_4: x \mapsto \sin x-\cos x+\pi$; $F_5: x \mapsto \sin x-\cos x$.

Activité 5

Soit F et f les fonctions définies sur $]0, +\infty[$ par $F(x)=\frac{2}{3}x\sqrt{x}-\frac{1}{2}x^2$ et $f(x)=\sqrt{x}-x$

1. Montrer que F est une primitive de f sur $]0, +\infty[$.
2. Déterminer la primitive G de f sur $]0, +\infty[$ telle que $G(1)=2$.

II. Primitives des fonctions usuelles et opérations

Dans le tableau ci-dessous F désigne une primitive de la fonction f sur l'intervalle I et a, c, ω et φ des réels avec $\omega \neq 0$.

f	I	F
$x \mapsto a$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto ax + c$
$x \mapsto x^n,\ n \in \mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + c$
$x \mapsto \dfrac{1}{x^n},\ n \in \mathbb{N} \backslash \{0,1\}$	$]0, +\infty[$ (ou $]-\infty, 0[$)	$x \mapsto \dfrac{x^{-n+1}}{-n+1} + c$
$x \mapsto \sqrt{x}$	$[0, +\infty[$	$x \mapsto \dfrac{2}{3} x\sqrt{x} + c$
$x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$]0, +\infty[$	$x \mapsto 2\sqrt{x} + c$
$x \mapsto \cos x$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \sin x + c$
$x \mapsto \sin x$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto -\cos x + c$
$x \mapsto \cos(\omega x + \varphi)$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \dfrac{1}{\omega}\sin(\omega x + \varphi) + c$
$x \mapsto \sin(\omega x + \varphi)$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto -\dfrac{1}{\omega}\cos(\omega x + \varphi) + c$
$x \mapsto 1 + \tan^2 x$	$\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$	$x \mapsto \tan x + c$

Le théorème ci-dessous découle des opérations sur les fonctions dérivables.

Théorème

Soit F et G deux primitives respectives de deux fonctions f et g sur un intervalle I.
- La fonction $F + G$ est une primitive sur I de $f + g$.
- Soit λ un réel. La fonction λF est une primitive sur I de λf.

Activité 1

Déterminer, dans chaque cas, une primitive de f sur l'intervalle I.

1. $f : x \mapsto -2x^2 + 3x$, $\quad I = \mathbb{R}$.
2. $f : x \mapsto -\dfrac{3}{x^2} + \dfrac{2}{\sqrt{x}}$, $\quad I =]0, +\infty[$.
3. $f : x \mapsto -2\cos x + 5\sin x$, $\quad I = \mathbb{R}$.
4. $f : x \mapsto \cos(-2x) + \sin(5x)$, $\quad I = \mathbb{R}$.

5. $f : x \mapsto 2 + 2\tan^2(x)$, $\quad I = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

6. $f : x \mapsto \frac{2}{x^3} - \frac{3}{x^4}$, $\quad I = [-3, -1]$.

Activité 2

La quantité d'une substance chimique produite au cours des dix premières secondes d'une expérience a été de 12g. Au bout de t secondes du début de l'expérience, le taux de production instantané (en g/s) de cette substance a été de $Q'(t) = \frac{40}{t^2} + \frac{200}{t^3}$, $t \geq 10$.

1. Déterminer la fonction Q qui à tout $t \geq 10$ associe la quantité $Q(t)$ produite au bout de t secondes.
2. Tracer dans un repère la courbe de la fonction Q.
3. Peut-on avoir 20 g de quantité produite ? Pourquoi ?

III. Calcul de primitives

Dans le tableau suivant F désigne une primitive de la fonction f sur un intervalle I et u et v désignent deux fonctions dérivables sur I.

f	Condition	F
$u'u^n$, n entier naturel non nul		$\frac{u^{n+1}}{n+1}$
$u'v + v'u$		$u.v$
$\frac{u'}{u^n}$, $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$	u ne s'annule pas sur I	$\frac{u^{-n+1}}{-n+1}$
$\frac{u'v - v'u}{v^2}$	v ne s'annule pas sur I	$\frac{u}{v}$
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	u strictement positive sur I	$2\sqrt{u}$
$u'\sqrt{u}$	u positive sur I	$\frac{2}{3}u\sqrt{u}$
$u'(w' \circ u)$	w une fonction dérivable sur $u(I)$	$w \circ u$

Exercice résolu 1

Vérifier dans chaque cas que la fonction f possède des primitives sur l'intervalle I et déterminer sa primitive F telle que $F(x_0)=y_0$.

1. $f : x \mapsto (2x-1)(x^2-x+3)$, $I=\mathbb{R}$, $x_0=1$ et $y_0=2$.
2. $f : x \mapsto \dfrac{6x-1}{(3x^2-x)^2}$, $I=]1,+\infty[$, $x_0=2$ et $y_0=0$.
3. $f : x \mapsto \dfrac{\tan^2 x}{\cos^2 x}$, $I=\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$, $x_0=-\dfrac{\pi}{4}$ et $y_0=-1$.

Solution

1. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction polynôme et alors elle admet des primitives sur $\mathbb{R}$.
De plus, f est de la forme $u'u$, où u est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x)=x^2-x+3$.
On en déduit que les primitives de f sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par
$F_c(x)=\dfrac{1}{2}(x^2-x+3)^2+c$, où c est un réel.
L'égalité $F(1)=2$ implique que la primitive cherchée est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par
$F(x)=\dfrac{1}{2}(x^2-x+3)^2-\dfrac{5}{2}$.
2. La fonction f est continue sur $]1,+\infty[$ en tant que fonction rationnelle définie sur $]1,+\infty[$ et alors elle admet des primitives sur $]1,+\infty[$.
De plus, f est de la forme $\dfrac{u'}{u^2}$, où u est la fonction définie sur $]1,+\infty[$ par $u(x)=3x^2-x$.
On en déduit que les primitives de f sont les fonctions définies sur $]1,+\infty[$ par
$F_c(x)=-\dfrac{1}{3x^2-x}+c$, où c est un réel.
L'égalité $F(2)=0$ implique que la primitive cherchée est la fonction définie sur $]1,+\infty[$ par
$F(x)=-\dfrac{1}{3x^2-x}+\dfrac{1}{10}$.
3. La fonction f est continue sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ en tant que quotient de fonctions continues sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ et dont le dénominateur ne s'annule pas. Elle admet donc des primitives sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$.

De plus, f est de la forme $u'u^2$, où u est la fonction définie sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ par $u(x) = \tan x$.

On en déduit que les primitives de f sont les fonctions définies sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ par

$F_c(x) = \frac{1}{3}\tan^3 x + c$, où c est un réel.

L'égalité $F\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1$ implique que la primitive cherchée est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$F(x) = \frac{1}{3}\tan^3 x - \frac{2}{3}$.

Activité 1

Vérifier dans chaque cas que la fonction f possède des primitives sur l'intervalle I et déterminer sa primitive F telle que $F(x_0) = y_0$.

1. $f : x \mapsto \frac{\tan^3 x}{\cos^2 x} + \sin x$, $\quad I = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, $\quad x_0 = -\frac{\pi}{4}$ et $y_0 = -1$.
2. $f : x \mapsto 2\sqrt{x} + \frac{x+1}{2\sqrt{x}}$, $\quad I =]0,+\infty[$, $\quad x_0 = 1$ et $y_0 = -1$.
3. $f : x \mapsto \sqrt{2-x} + \frac{1}{(2-x)^2}$, $\quad I =]-\infty,2[$, $\quad x_0 = 1$ et $y_0 = 0$.

Activité 2

Un physicien étudie le mouvement d'une particule.
La vitesse initiale de la particule est de 3m/s et t secondes après le début de l'expérience, son accélération (en cm/s^2) est de $a(t) = 1 - \frac{1}{2\left(\sqrt{t+1}\right)^3}$.

1. Déterminer la vitesse de la particule t secondes après le début de l'expérience.
2. Déterminer la distance parcourue par la particule t secondes après le début de l'expérience.

Activité 3

Soit f la fonction définie sur $]2,+\infty[$ par $f(x) = \frac{2x^3 - 11x^2 + 20x - 10}{(x-2)^2}$.

1. Déterminer les réels a, b et c tels que $f(x) = ax + b + \frac{c}{(x-2)^2}$.
2. En déduire une primitive de f sur $]2,+\infty[$.

Activité 4

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\sin^2 x$.

   Utiliser l'égalité $\sin^2 x=\dfrac{1-\cos 2x}{2}$ pour déterminer une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

2. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=\sin^3 x$.

   Utiliser l'égalité $\sin^3 x=\sin x\left(1-\cos^2 x\right)$ pour déterminer une primitive de g sur $\mathbb{R}$.

3. Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x\mapsto\cos^2 x$.

   Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x\mapsto\cos^3 x$.

Exercice résolu 2

Soit f la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{1+x^2}{1+x+x^2}$ et C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. a. Etudier f et tracer C_f.

   b. En déduire que pour tout réel t de $[0,+\infty[$, $\dfrac{2}{3}\le f(t)\le 1$.

2. Soit F la primitive de f sur $[0,+\infty[$ qui s'annule en 0.

   a. Montrer que pour tout réel x de $[0,+\infty[$ on a $\dfrac{2}{3}x\le F(x)\le x$.

   b. En déduire la limite de F en $+\infty$.

   c. Dresser le tableau de variation de F.

3. a. Montrer que pour tout entier $m\ge 0$, il existe un unique réel x_m tel que $F(x_m)=m$.

   b. Etudier les variations de la suite (x_m) et en déduire sa limite.

Solution

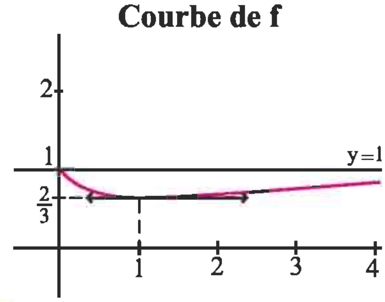
1. a. La fonction f est une fonction rationnelle et $1+x+x^2\ne 0$ pour tout réel x, donc f est continue et dérivable sur $[0,+\infty[$.

   Le calcul donne $f'(x)=\dfrac{x^2-1}{\left(1+x+x^2\right)^2}, x\ge 0$.

Tableau de variations de f

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	1	$\searrow$	$\dfrac{2}{3}$	$\nearrow$	1

Courbe de f



b. D'après le tableau de variation de f, $\frac{2}{3} \le f(t) \le 1,\ t \in [0,+\infty[$.

2. a. La fonction F est une primitive de f sur $[0, +\infty[$, elle est dérivable sur $[0, +\infty[$ et $F'(t) = f(t),\ t \ge 0$.

De la question 1. b on déduit que $\frac{2}{3} \le F'(t) \le 1,\ t \ge 0$.

On applique le théorème des inégalités des accroissements finis sur $[0, x],\ x > 0$.

Le résultat en découle.

b. Pour tout réel x de $[0,+\infty[$,

$\frac{2}{3}x \le F(x) \le x$. De plus, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2}{3}x = +\infty$.

Il en résulte que $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = +\infty$.

x	0		$+\infty$
$F'(x)$		$+$	
F	0	$\nearrow$	$+\infty$

3. a. La fonction F est continue et strictement croissante sur $[0,+\infty[$. Elle réalise une bijection de $[0,+\infty[$ sur $[0,+\infty[$.

On en déduit que pour tout entier $m \ge 0$, il existe un unique réel $x_m \ge 0$ tel que $F(x_m) = m$.

b. On peut écrire pour tout entier $m \ge 0$, $x_m = F^{-1}(m)$. La fonction F^{-1} étant strictement croissante de $[0,+\infty[$ sur $[0,+\infty[$, on en déduit que la suite (x_m) est croissante et que $\lim\limits_{m\to+\infty} x_m = +\infty$.

QCM

Cocher la réponse exacte.

1. La fonction $x \mapsto \tan x$ est la primitive sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ qui s'annule en 0 de la fonction

☐ $x \mapsto 1+\tan^2 x$. ☐ $x \mapsto \frac{1}{\sin^2 x}$. ☐ $x \mapsto \sin^2 x$.

2. La primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto \sin x$, qui s'annule en 0 est la fonction

☐ $x \mapsto 1-\cos x$. ☐ $x \mapsto -\cos x$. ☐ $x \mapsto \cos x - 1$.

3. La primitive sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0 de la fonction $x \mapsto 1+\cos x$ est

☐ paire. ☐ impaire. ☐ ni paire ni impaire.

4. La primitive sur $]-1, +\infty[$ de la fonction $x \mapsto \frac{1}{(1-x)^3}$, qui s'annule en 0 est

☐ $x \mapsto \frac{1}{2(1-x)^2} - \frac{1}{2}$. ☐ $x \mapsto \frac{1}{4(1-x)^4} - \frac{1}{4}$. ☐ $x \mapsto \frac{-1}{2(1-x)^2} + \frac{1}{2}$.

5. La primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto x\cos x$, qui prend la valeur 1 en 0 est

☐ $x \mapsto \frac{x^2}{2}\sin x + 1$. ☐ $x \mapsto x\sin x + \cos x$. ☐ $x \mapsto \cos x - x\sin x$.

VRAI – FAUX

Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse.

1. La primitive sur $\mathbb{R}$ d'une fonction continue est une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

2. La fonction $x \mapsto \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \in \mathbb{R}^*, \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction

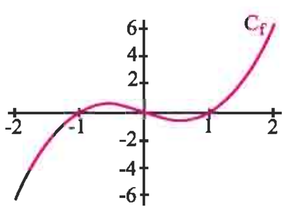
$$x \mapsto \begin{cases} -\cos\left(\frac{1}{x}\right) + 2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \in \mathbb{R}^*, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

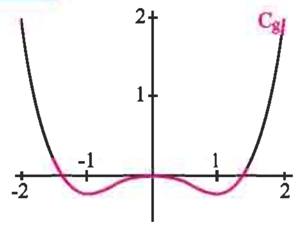
3. Si F est une primitive d'une fonction f sur $\mathbb{R}$ et G est une primitive d'une fonction g sur $\mathbb{R}$ alors F.G est une primitive de f.g sur $\mathbb{R}$.
4. Si F est une primitive d'une fonction f sur $\mathbb{R}$ alors la fonction $x \mapsto F(2x)$ est une primitive de la fonction $x \mapsto f(2x)$ sur $\mathbb{R}$.
5. Si deux primitives d'une fonction f sur un intervalle I coïncident en un réel x_0 de I alors elles sont égales.

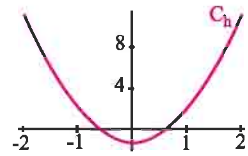
1 Déterminer les primitives F sur I de chacune des fonctions f ci-dessous.

1. $f : x \mapsto -5x^4 + 2x - 3,\quad I = \mathbb{R}.$
2. $f : x \mapsto x + 2 - \dfrac{3}{x^2},\quad I =]-\infty, 0[.$
3. $f : x \mapsto \dfrac{3x}{\left(3x^2+2\right)^2},\quad I = \mathbb{R}.$
4. $f : x \mapsto (-x+3)^6,\quad I = \mathbb{R}.$
5. $f : x \mapsto (x-1)\left(x^2-2x+7\right)^4,\quad I = \mathbb{R}.$
6. $f : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{-4x+3}},\quad I = \left]-\infty, \dfrac{3}{4}\right[.$
7. $f : x \mapsto \dfrac{\cos\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}},\quad I =]0,+\infty[.$
8. $f : x \mapsto \dfrac{x^2+1}{\left(x^3+3x\right)^5},\quad I = \left]-\infty, -\sqrt{3}\right[.$
9. $f : x \mapsto \sin(2x+1)\cos^4(2x+1),\quad I = \mathbb{R}.$
10. $f : x \mapsto x^2\sin\left(x^3+1\right),\quad I = \mathbb{R}.$
11. $f : x \mapsto \dfrac{\sin x}{(\cos x+1)^3},\quad I =]-\pi, \pi[.$
12. $f : x \mapsto \dfrac{3x^2+4x-2}{x^4},\quad I =]-\infty, 0[.$
13. $f : x \mapsto \dfrac{2x-1}{\sqrt{x^2-x}},\quad I =]1,+\infty[.$
14. $f : x \mapsto \tan^2 x,\quad I = \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[.$

2 On a représenté ci-dessous les courbes de trois fonctions g , f et h, définies et dérivables sur $[-2,2]$.







1. On sait que f admet une primitive parmi les fonctions g et h sur $[-2,2]$. Laquelle ? Justifier la réponse.
2. On sait que h admet une primitive parmi les fonctions f et g sur $[-2,2]$. Laquelle ? Justifier la réponse.

3 Déterminer une primitive sur I de chacune des fonctions ci-dessous.

1. $f : x \mapsto \sqrt{x+1},\quad I = \mathbb{R}_+^*.$
2. $f : x \mapsto x\sqrt{x^2+1},\quad I = \mathbb{R}.$
3. $f : x \mapsto (x-3)\sqrt{x^2-6x},\quad I = [6,+\infty[.$
4. $f : x \mapsto \dfrac{x+1}{\sqrt{x-1}},\quad I =]1,+\infty[.$

(On pourra écrire $f(x)$ sous la forme

$a\sqrt{x-1} + \dfrac{b}{\sqrt{x-1}}$, $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$).

5. $f : x \mapsto \left(x^2+x\right)^7\left(x+\dfrac{1}{2}\right),\quad I = \mathbb{R}.$
6. $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2}\sqrt{\dfrac{3+x}{2x}},\quad I = \mathbb{R}_+^*.$
7. $f : x \mapsto x(x+1)^{2008},\quad I = \mathbb{R}.$

(On pourra vérifier que
$f(x) = (x+1)^{2009} - (x+1)^{2008}$).

4 Dans chacun des cas suivants, vérifier que la fonction f possède des primitives sur l'intervalle I et déterminer sa primitive F vérifiant $F\left(x_0\right) = y_0$.

1. $f(x) = \tan x + \tan^3 x,\quad I = [0, \dfrac{\pi}{2}[,\quad F\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 1.$

2. $f(x)=\cos x-\cos^3 x$, $\quad I=\mathbb{R}$, $\quad F\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1$.

3. $f(x)=\sin x-\sin^3 x$, $\quad I=\mathbb{R}$, $\quad F\left(-\frac{\pi}{4}\right)=2$.

4. $f(x)=\dfrac{1+\tan x}{\cos^2 x}$, $\quad I=\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$, $\quad F\left(\frac{\pi}{4}\right)=0$.

5 1. Soit f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par

$f(x)=\cos x.\cos(3x)$ et $g(x)=\sin x.\sin(3x)$.

a. Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de chacune des fonctions $f+g$ et $f-g$.

b. En déduire les primitives sur $\mathbb{R}$ des fonctions f et g.

2. Déterminer la primitive sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en π de la fonction h définie par

$h(x)=(1+\cos x)\sin(4x)$.

6 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$f(x)=x\sin x$.

1. Montrer que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et que pour tout réel x, $f(x)=2\cos x-f''(x)$.

2. En déduire la primitive de f sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en π.

7 Soit f la fonction définie sur $]-1,+\infty[$ par

$$f(x)=\frac{x^2+2}{(x+1)^4}.$$

On se propose de déterminer des réels a, b, c et d tels que pour tout x de $]-1,+\infty[$,

$$f(x)=\frac{a}{x+1}+\frac{b}{(x+1)^2}+\frac{c}{(x+1)^3}+\frac{d}{(x+1)^4}.$$

1. a. Calculer $\lim\limits_{x\to(-1)^+}(x+1)^4 f(x)$ et

$\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1)f(x)$.

b. En déduire que $d=3$ et $a=0$.

2. a. Vérifier que pour tout réel x de $]-1,+\infty[$,

$$\frac{x-1-c}{(x+1)^3}=\frac{b}{(x+1)^2}.$$

b. En déduire les valeurs des réels b et c.

3. Déterminer la primitive de f sur $]-1,+\infty[$ égale 2 en 0.

8 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{2\}$ par

$$f(x)=\frac{2x+1}{(x-2)^3}.$$

1. Déterminer les réels a et b tels que pour tout x de $\mathbb{R}\setminus\{2\}$, $f(x)=\dfrac{a}{(x-2)^2}+\dfrac{b}{(x-2)^3}$.

2. En déduire une primitive de f sur $]-\infty,2[$.

9 On considère la fonction f définie sur $]-1,1[$

par $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Soit F la primitive de f sur $]-1,1[$ qui s'annule en 0, et g la fonction définie sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ par $g(x)=F(\sin x)$.

1. Montrer que g est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ et déterminer sa fonction dérivée.

2. En déduire que pour tout $x\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$, $g(x)=x$.

3. Calculer $F\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $F\left(\frac{1}{2}\right)$ et $F\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

10 On considère la fonction f définie sur $[0,1]$

par $f(x)=\sqrt{1-x^2}$.

Soit F la primitive de f sur $[0,1]$ qui s'annule en 0, et g la fonction définie sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

par $g(x)=F(\cos x)$.

1. Montrer que g est dérivable sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ et déterminer sa fonction dérivée.

2. En déduire que pour tout $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$,

$$g(x)=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{\pi}{4}.$$

3. Calculer $F(1)$ et $F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

11 Déterminer toutes les fonctions deux fois dérivable sur I telles que :

1. $f''(x)=0$, $\quad I=\mathbb{R}$.

2. $f''(x)=\sin x$, $\quad I=\mathbb{R}$.

12 1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par
$f(x)=|x|$.
a. Montrer que f admet au moins une primitive sur $\mathbb{R}$.
b. Déterminer la primitive F de f sur $\mathbb{R}$ qui prend la valeur 0 en 4.
2. Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par
$g(x)=|x|+|x-1|$.
a. Montrer que g admet au moins une primitive sur $\mathbb{R}$.
b. Déterminer une primitive G de g sur $\mathbb{R}$.

13 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par
$f(x)=\sin^3 x+\sin^5 x$.
Déterminer une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

14 Un mobile sur un axe subit une accélération $a(t)$ dépendant du temps t (en secondes) tel que
$a(t)=1-\dfrac{1}{(t+1)^2}$, $t\in[0,10]$.
A l'instant $t=0$, le mobile est placé à l'origine de l'axe avec une vitesse nulle.
1. Déterminer l'expression de sa vitesse instantanée $v(t)$.
2. Déterminer sa vitesse et sa position pour $t=10$.

15 Soit f la fonction définie sur $[-2,2]$ par
$f(x)=\sqrt{4-x^2}$.
1. a. Montrer que f admet au moins une primitive sur $[-2,2]$.
b. Soit F la primitive de f sur $[-2,2]$ qui s'annule en 0. Etudier la parité de F.
2. Soit G la fonction définie sur $[0,\pi]$, par
$G(x)=F(2\cos x)$ et C sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.
a. Montrer que le point $I\left(\dfrac{\pi}{2},0\right)$ est un centre de symétrie de C.
b. Calculer $G'(x)$. En déduire que pour tout x de $[0,\pi]$, $G(x)=\pi-2x+\sin 2x$.
c. Calculer alors $F(1)$, $F(2)$ et $F(\sqrt{2})$.

16 Soit u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par
$u(x)=x+\sqrt{x^2+1}$.
1. Exprimer $\sqrt{x^2+1}$ à l'aide de $u(x)$ et $u'(x)$.
2. Déterminer des primitives pour chacune des fonctions ci-dessous.
$f:x\mapsto\dfrac{1}{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\sqrt{x^2+1}}$.
$g:x\mapsto\dfrac{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^2}{\sqrt{x^2+1}}$.

17 Soit les fonctions $f:x\mapsto x\cos x$ et $g:x\mapsto x\sin x$.
1. En calculant $f'(x)+g(x)$, trouver une primitive G de g sur $\mathbb{R}$.
2. En procédant de même, déterminer une primitive F de f sur $\mathbb{R}$.

18 Pour tout entier naturel n supérieur à 2, on considère la fonction P_n définie sur $\mathbb{R}$ par
$P_n(x)=1+2x+3x^2+...+nx^{n-1}$.
1. Déterminer la primitive F_n de P_n sur $\mathbb{R}$ égale à 1 en 0.
2. Déduire une autre expression de $P_n(x)$.

19 1. Soit g la fonction définie sur $[0,\pi]$ par
$g(x)=x\sin x+\cos x-1$.
a. Etudier les variations de g sur $[0,\pi]$.
b. Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet une solution α appartenant à $\left]\dfrac{2\pi}{3},\pi\right[$.
Préciser le signe de $g(x)$.
2 Soit f la fonction définie par
$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos x}{x} & \text{si } x\in]0,\pi],\\ 0 & \text{si } x=0.\end{cases}$$
a. Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 0.
b. Etudier les variations de f sur $[0,\pi]$.
c. Vérifier que $f(\alpha)=\sin\alpha$.

3. On donne $\alpha \simeq 2,34$ et $f(\alpha) \simeq 0,72$.
Construire la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

4. Déduire de ce qui précède que la restriction de f à $[\alpha,\pi]$ est une bijection de $[\alpha,\pi]$ sur un intervalle I que l'on précisera.

5. On pose $h(x)=g(x)-2\cos x$, $x\in[0,\pi]$.
Montrer que h admet des primitives sur $[0,\pi]$.
Donner la primitive H de h sur $[0,\pi]$ qui prend la valeur 1 en 0.

20 Pour tout réel x, on pose $\varphi(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ et on désigne par G la primitive de φ sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0.

1. Montrer que G est une fonction impaire.

2. a. On pose pour tout x de $\mathbb{R}^*$,
$\psi(x)=G(x)+G\left(\dfrac{1}{x}\right)$.
Montrer que ψ est constante sur chacun des intervalles $]-\infty,0[$ et $]0,+\infty[$.
En déduire que $\lim\limits_{x\to+\infty}\Psi(x)=2G(1)$.

b. On pose $u(t)=G(\tan t), t\in\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$.
Calculer $u'(t)$ et en déduire $u(t)$.

3. Déterminer $G(1)$ et en déduire
$\lim\limits_{x\to+\infty}\psi(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}G(x)$.

4. Construire la courbe représentative de G dans un repère orthonormé.

21 Soit f la fonction définie sur $[0,\pi]$ par
$f(x)=\sqrt{1+\cos x}$.

1. a. Montrer que f est une bijection de $[0,\pi]$ sur $[0,\sqrt{2}]$.

b. Montrer que la fonction f^{-1} est dérivable sur $]0,\sqrt{2}[$ et expliciter $\left(f^{-1}\right)'(x)$.

2. Soit g la fonction définie sur $]-\sqrt{2},\sqrt{2}[$ par
$g(x)=\dfrac{2}{\sqrt{2-x^2}}$.
On note G la primitive de g sur $]-\sqrt{2},\sqrt{2}[$ telle que $G(0)=0$.

a. Calculer la dérivée de la fonction $x\mapsto G(x)+G(-x)$. En déduire que G est impaire.

b. Montrer que pour tout x de $[0,\sqrt{2}[$,
$G(x)=\pi-f^{-1}(x)$. En déduire $G(1)$.

22 Soit f une fonction continue sur $[0, 1]$ et dérivable sur $]0, 1[$. On suppose que
$f(0)=1$, $f(1)=0$ et $f'(x)=\dfrac{-2}{\pi\sqrt{1-x^2}}$, $x\in]0, 1[$.

1. Montrer que f est une bijection de $[0,1]$ sur $[0,1]$.

2. a. Montrer que pour tout x de $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$,
$f(\cos x)=\dfrac{2}{\pi}x$.

b. En déduire $f^{-1}(x)$ pour tout x de $[0, 1]$.

3. On pose pour tout x de $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$,
$h(x)=f(\cos x)+f(\sin x)$.

a. Montrer que h est dérivable sur $\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ et calculer $h'(x)$.

b. En déduire que pour tout x de $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$, $h(x)=1$.

4. Pour tout n de $\mathbb{N}^*$ on pose
$\varphi_n(x)=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}x\right)-x^n$, $x\in[0,1]$.

a. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, il existe un unique réel $a_n\in]0,1[$ tel que $\varphi_n(a_n)=0$.

b. Montrer que pour tout x de $]0,1[$, si $n>p$ alors $\varphi_n(x)>\varphi_p(x)$.

c. En déduire que la suite (a_n) est strictement croissante et convergente.

Chapitre 7

Intégrales

La parabole considérée par Thabit Ibn Qurra est définie par une propriété que nous traduisons aujourd'hui par l'équation $y^2=px$ et la quadrature de la parabole

est équivalente à notre calcul de l'intégrale $\int_0^a \sqrt{px}$.

Mais le calcul immédiat d'une telle intégrale, [...],
aurait exigé la sommation de [...] $\sqrt{1}+\sqrt{2}+\dots+\sqrt{n}$.

Ibn Qurra étudie cette difficulté en recourant à un artifice astucieux. [...].

(AP. Youschkevitch,
Les mathématiquesarabes, 1976).

Thabit Ibn Qurra est un mathématicien arabe qui vécut au Xe siècle

Chapitre 7

Intégrales

I. Définition

I.1 Intégrale d'une fonction continue et positive

Activité 1

Le plan est muni d'un repère orthonormé.
On considère la fonction f définie par
$f(x)=x+2$

> Le plan étant muni d'un repère orthogonal $(O,\vec{i},\vec{j})$, l'unité d'aire, notée par u.a est l'aire du rectangle de dimensions $\|\vec{i}\|$ et $\|\vec{j}\|$.

1. Tracer la courbe représentative de f.
2. Soit $\mathcal{P}$ la partie du plan limitée par l'axe des abscisses, la courbe de f et les droites d'équations $x=-2$ et $x=0$.
3. Calculer l'aire $\mathcal{A}$ de $\mathcal{P}$.
4. a. Déterminer la primitive F de f sur $\mathbb{R}$ qui prend la valeur 1 en 0.
   b. Vérifier que $\mathcal{A}$ = F(0)-F(-2).
   c. Montrer que si G est une autre primitive de f sur $\mathbb{R}$, alors $\mathcal{A}$ = G(0) – G(-2).

Propriété

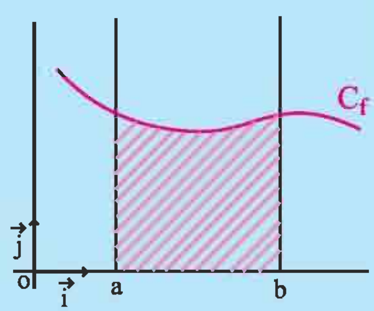
Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Si F et G sont deux primitives de f sur I alors pour tous a et b de I, $F(b)-F(a)=G(b)-G(a)$.

Démonstration

Les fonctions F et G étant des primitives de f sur I, la fonction $F-G$ est constante sur I. On en déduit que pour tous réels a et b de I, $F(b)-G(b)=F(a)-G(a)$. La propriété en découle.

Définition

Le plan est muni d'un repère orthogonal.
Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a,b]$ et F une primitive de f sur $[a,b]$.
L'aire (en u.a) de la partie du plan limitée par la courbe de f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$ est le réel $F(b)-F(a)$.
Le réel $F(b)-F(a)$ est appelé intégrale de f de a à b et est noté $\int_a^b f(x)dx$.



Activité 2

Le plan est muni d'un repère orthonormé.

On considère la fonction $f : x \mapsto x^3 - \frac{3}{2}x^2$.

1. Représenter la partie $\mathcal{P}$ du plan limitée par l'axe des abscisses, la courbe de f et les droites d'équations $x = 2$ et $x = 3$.
2. Calculer l'aire de $\mathcal{P}$.

I.2 Intégrale d'une fonction continue

Définition

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, a et b deux réels de I et F une primitive de f sur I.

On appelle intégrale de f entre a et b le réel, noté $\int_a^b f(x)dx$, défini

par $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

Vocabulaire et notations

- Le réel $\int_a^b f(x)dx$ est appelé intégrale de f sur $[a, b]$ lorsque $a \leq b$, ou encore de a à b, ou encore entre a et b.
- Dans l'écriture $\int_a^b f(x)dx$, on peut remplacer la lettre x par n'importe quelle lettre et on peut écrire $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(u)du = \int_a^b f(t)dt$. On dit que x est une variable muette.
- Pour toute primitive F de f, on écrit $\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$.

L'expression $[F(x)]_a^b$ se lit « $F(x)$ pris entre a et b ».

Activité 3

Calculer $\int_{\frac{1}{2}}^1 (x^2 - 1)dx$, $\int_0^1 \sin(2x + 3)dx$, $\int_{-1}^1 \frac{2x}{(x^2 + 1)^2}dx$.

II. Propriétés algébriques de l'intégrale

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, a, b et c des réels de I. Alors

$$\int_a^a f(x)dx = 0 \; ; \quad \int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx \; .$$

$$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx \text{ (Relation de Chasles).}$$

Démonstration

Soit F une primitive de f sur I.

$$\int_a^a f(x)dx = F(a) - F(a) = 0.$$

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = -\big(F(a) - F(b)\big) = -\int_b^a f(x)dx \, .$$

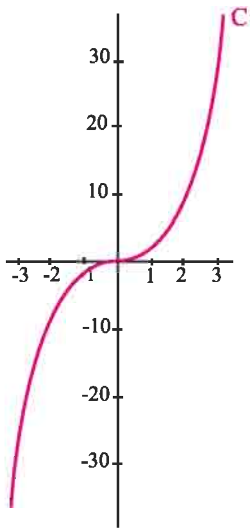
$$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \big(F(c) - F(a)\big) + \big(F(b) - F(c)\big) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx \, .$$

Activité 1

1. Représenter dans le plan muni d'un repère orthonormé la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 - 1$.
2. Calculer l'aire de la partie limitée par la courbe de $-f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -1$ et $x = 2$.
3. En déduire que l'aire de la partie limitée par la courbe de f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -1$ et $x = 2$ est égale à $\int_{-1}^{2} -f(x)dx$.

Activité 2

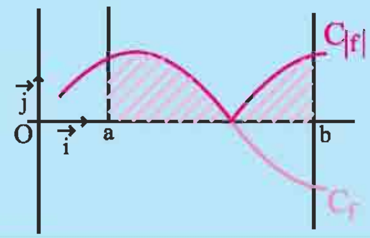
Dans le plan muni d'un repère orthogonal, on a tracé la courbe C de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$.



1. Tracer la courbe C' représentative de $|f|$.
2. a. Représenter la partie P' du plan limitée par l'axe des abscisses, la courbe C' et les droites d'équations $x = -2$ et $x = 3$.
   b. Calculer l'aire de P'.
3. En déduire l'aire la partie P du plan limitée par l'axe des abscisses, la courbe C et les droites d'équations $x = -2$ et $x = 3$.

Définition

Le plan est muni d'un repère orthogonal.
Soit f une fonction continue sur $[a,b]$.
L'aire (en u.a) de la partie du plan limitée par l'axe des abscisses, la courbe de f, les droites d'équations $x=a$ et $x=b$ est le réel $\int_a^b |f(x)|dx$.



Activité 3

Le plan est muni d'un repère orthonormé.
Calculer, dans chacun des cas ci-dessous, l'aire de la partie du plan limitée par l'axe des abscisses, la courbe de f, les droites d'équations $x=a$ et $x=b$.

1. $f: x \mapsto \cos 3x$, $a=-\frac{\pi}{3}$ et $b=\frac{\pi}{4}$.
2. $f: x \mapsto x\left(x^2+1\right)^2$, $a=-2$ et $b=1$.

Théorème (linéarité)

Soit f et g deux fonctions continues sur $[a,b]$.

Pour tous réels α et β, $\int_a^b(\alpha f(x)+\beta g(x))dx=\alpha\int_a^b f(x)dx+\beta\int_a^b g(x)dx$.

Démonstration

Soit F et G deux primitives respectives de f et g sur $[a,b]$. Alors pour tous réels α et β, $\alpha F+\beta G$ est une primitive de $\alpha f+\beta g$ sur $[a,b]$. On peut écrire

$$\begin{aligned}\int_a^b(\alpha f(x)+\beta g(x))dx &= (\alpha F(b)+\beta G(b))-(\alpha F(a)+\beta G(a))\\ &= \alpha(F(b)-F(a))+\beta(G(b)-G(a))\\ &= \alpha\int_a^b f(x)dx+\beta\int_a^b g(x)dx.\end{aligned}$$

Activité 4

Calculer $\int_1^2 \frac{x^2}{(x+1)^2}dx+\int_1^2\frac{2x+1}{(x+1)^2}dx$.

Activité 5

Soit les intégrales $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\,dx$ et $J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 x}{2}dx$

1. Calculer $I+2J$ et $2J-I$.
2. En déduire les valeurs de I et J.

III. Intégrales et inégalités

Théorème (positivité)

Soit f une fonction continue sur $[a,b]$. Si f est positive sur $[a,b]$, alors $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.

Démonstration

Toute primitive sur $[a,b]$ d'une fonction positive est croissante sur $[a, b]$.
Le théorème en découle.

Corollaire

Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ où $a < b$. Si f est positive et ne s'annule qu'en un nombre fini de réels de $[a,b]$, alors $\int_a^b f(x)dx > 0$.

Démonstration

Toute primitive sur $[a,b]$ d'une fonction positive qui ne s'annule qu'en un nombre fini de réels de $[a,b]$ est strictement croissante sur $[a,b]$. Le corollaire en découle.

Exercice résolu 1

1. Montrer que $\frac{1}{1+x} > 1-x$, pour tout réel x de $]0,1]$.
2. Montrer que $\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}dx > \frac{1}{4}$.

Solution

1. Pour tout réel x de $]0,1]$, $(1-x)(1+x) = 1-x^2$, ce qui équivaut à $(1-x)(1+x) < 1$.

Il en résulte que pour tout réel x de $]0,1]$, $\frac{1}{1+x} > 1-x$, car $1+x > 0$.

2. Il découle de la première question que $\frac{1}{1+x^2} > 1-x^2$, pour tout réel x de $]0,1]$.

On en déduit que $\int_0^1 \frac{x}{1+x^2} > \int_0^1 x - x^3 dx$.

L'égalité $\int_0^1 x - x^3 dx = \frac{1}{4}$ nous donne alors que $\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}dx > \frac{1}{4}$.

Corollaire (comparaison)

Soit f, g et h trois fonctions continues sur $[a,b]$.

Si $h \leq f \leq g$, alors $\int_a^b h(x)dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$.

Démonstration

La fonction $f-h$ étant positive sur $[a,b]$, il résulte de la positivité de l'intégrale que $\int_a^b (f(x)-h(x))dx \geq 0$, ou encore que $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b h(x)dx$.

On montre de même que $\int_a^b g(x)dx \geq \int_a^b f(x)dx$.

Exercice résolu 2

1. Montrer que pour tout $x>0$, $-x \leq \sin x \leq x$.
2. En déduire que pour tout $x>0$, $1-\frac{x^2}{2} \leq \cos x$

Solution

1. On sait que pour tout réel t, $-1 \leq \cos t \leq 1$.

   On en déduit que pour tout réel $x \geq 0$, $\int_0^x -1dt \leq \int_0^x \cos t\,dt \leq \int_0^x 1dt$.

   Ce qui prouve que pour tout $x \geq 0$, $-x \leq \sin x \leq x$.
2. Il résulte de la double inégalité prouvée dans la première question que pour tout $x \geq 0$, $\int_0^x \sin t\,dt \leq \int_0^x t\,dt$, ou encore que, $1-\cos x \leq \frac{x^2}{2}$. Ce qui donne le résultat.

Corollaire

Si f est une fonction continue sur $[a,b]$, alors $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$.

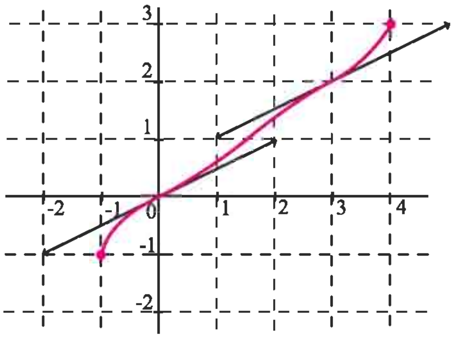
Démonstration

La propriété découle du corollaire précédent et de la double inégalité $-|f| \leq f \leq |f|$.

Activité 1

On a représenté une fonction f dérivable sur $[-1,4]$, ainsi que les tangentes aux points d'abscisses 0 et 3.

1. Vérifier graphiquement que pour tout réel x de $[0,3]$, $\frac{x}{2} \leq f(x) \leq \frac{x+1}{2}$.
2. En déduire que $\frac{9}{4} \leq \int_0^3 f(x)dx \leq \frac{15}{4}$.



Activité 2

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x^2}dx$.

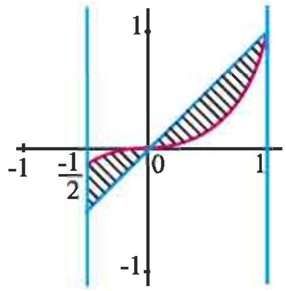
1. Soit $n \in \mathbb{N}$, montrer que pour tout x de $[0,1]$, $0 \le \frac{x^{n+1}}{1+x^2} \le x^{n+1}$.
2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \le u_n \le \frac{1}{n+2}$.
3. a. Donner une valeur approchée de u_{100} et préciser l'erreur commise.

   b. Donner une valeur approchée de u_{10000} et préciser l'erreur commise.

Activité 3

On a tracé ci-contre les courbes des fonctions

f et g définies sur $\left[-\frac{1}{2}, 1\right]$ par $f(x) = x$ et $g(x) = x^3$.



On se propose de calculer l'aire de la partie du plan limitée par les courbes C_f et C_g et les droites d'équations $x = -\frac{1}{2}$ et $x = 1$.

1. a. Calculer l'aire de la partie limitée par la courbe C_f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

   b. Calculer l'aire de la partie limitée par la courbe C_g, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

   c. En déduire l'aire de la partie limitée par les courbes C_f et C_g et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.
2. Calculer l'aire de la partie limitée par les courbes C_f et C_g et les droites d'équations $x = -\frac{1}{2}$ et $x = 0$.
3. Conclure.

Définition

Le plan est muni d'un repère orthogonal.
Soit f et g deux fonctions continues sur $[a, b]$.
L'aire (en u.a) de la partie du plan limitée par la courbe de f, la courbe de g et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est le réel $\int_a^b |f(x) - g(x)|dx$.

Activité 4

Le plan est muni d'un repère orthonormé.

Soit f et g les fonctions définies sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ par $f(x)=\sin x$ et $g(x)=\cos x$.

1. Représenter les courbes C_f et C_g de f et g sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
2. Etudier le signe de $f-g$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
3. Calculer l'aire de la partie du plan limitée par les courbes C_f et C_g et les droites d'équations, $x=0$ et $x=\frac{\pi}{2}$.

IV. Calculs d'intégrales

IV. 1 Calcul au moyen d'une primitive

Activité 1

Calculer les intégrales suivantes.

$$\int_0^3\left(5x^4-x^3-2\right)dx \; ; \; \int_{-2}^{-1}\frac{1}{t^2}dt \; ; \; \int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\cos^2 x}dx \; ; \; \int_{-1}^{2}\left(3x^2+1\right)\left(x^3+x-2\right)dx \; ;$$

$$\int_0^1\frac{-2u}{\left(u^2+2\right)^3}du \; ; \; \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos t}{\sin^3 t}dt, \; \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\sin^3 x\,dx, \; \int_0^1\frac{x^3}{\sqrt{x^4+1}}dx .$$

IV. 2 Intégration par parties

Théorème d'intégration par parties

Soit f et g deux fonctions dérivables sur $[a,b]$ et telles que leurs dérivées f' et g' sont continues sur $[a,b]$.

Alors $\displaystyle\int_a^b f(t)g'(t)dt=\left[f(t)g(t)\right]_a^b-\int_a^b f'(t)g(t)dt$.

Démonstration

On sait que $(fg)'=f'g+g'f$. La continuité des fonctions f' et g' sur $[a,b]$ nous permet d'écrire que $\displaystyle\int_a^b (fg)'(x)dx=\int_a^b\left(f'(x)g(x)+g'(x)f(x)\right)dx=\left[f(x)g(x)\right]_a^b$.

Le théorème en résulte.

Exercice résolu 3

Calculer les intégrales ci-dessous.

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x \, dx \ ; \ J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x \, dx \ ; \ K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x \, dx .$$

Solution

- Calcul de I.

Posons $u(x) = x$ $\qquad u'(x) = 1$

$v'(x) = \sin x$ $\qquad v(x) = -\cos x$

On obtient, $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x \, dx = [-x \cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx = [\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$.

- Calcul de J.

Posons $u(x) = x$ $\qquad u'(x) = 1$

$v'(x) = \cos x$ $\qquad v(x) = \sin x$

On obtient, $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x \, dx = [x \sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx = \frac{\pi}{2} + [\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 1$.

- Calcul de K.

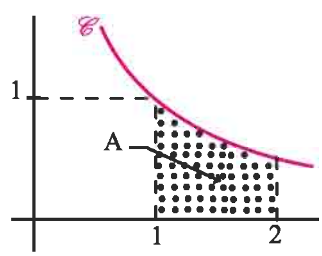
Posons $u(x) = x^2$ $\qquad u'(x) = 2x$

$v'(x) = \cos x$ $\qquad v(x) = \sin x$

On obtient, $K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x \, dx = \left[x^2 \sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x \, dx = \frac{\pi^2}{4} - 2I = \frac{\pi^2}{4} - 2$.

IV. 3. Calcul approché d'intégrales (Méthode des rectangles)

Activité 2



Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on a tracé la courbe $\mathscr{C}$ de la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x}$.

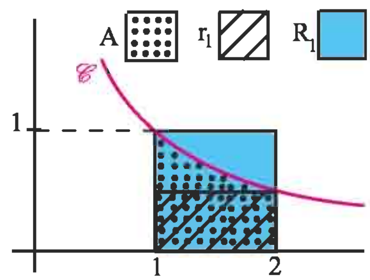
On désigne par A l'aire (en u.a) de la partie limitée par l'axe des abscisses, la courbe $\mathscr{C}$ et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 2$.

1. Vérifier que $A = \int_1^2 \frac{dx}{x}$.

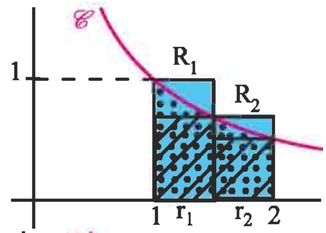
On se propose de donner des encadrements de A.

2. On trace les rectangles r_1 et R_1 comme l'indique le schéma ci-contre.

Vérifier que $\frac{1}{2} \leq A \leq 1$.

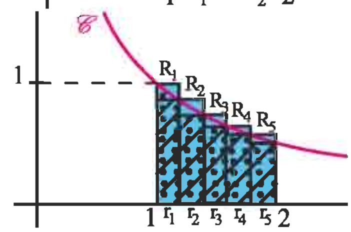


3. On partage l'intervalle $[1,2]$ en deux intervalles de longueur 0.5.
On trace les rectangles r_1, r_2 et R_1, R_2 Comme l'indique le schéma ci-contre. Vérifier que $\frac{7}{12} \leq A \leq \frac{5}{6}$.



4. On partage l'intervalle $[1,2]$ en 5 intervalles, de longueur $\frac{1}{5}$.

On trace les rectangles r_i et les rectangles R_i, $1 \leq i \leq 5$.
comme l'indique la figure ci-contre.
Donner un nouvel encadrement de A.



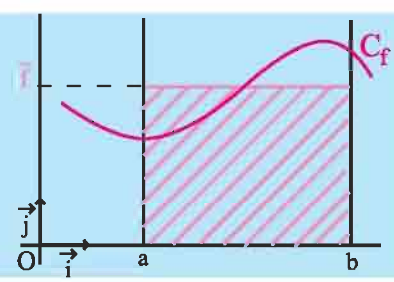
IV. 4 Valeur moyenne et inégalité de la moyenne

Définition

Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ tel que $a<b$. On appelle valeur moyenne de f sur $[a,b]$ le réel, noté $\bar{f}$, défini par $\bar{f} = \frac{1}{(b-a)} \int_a^b f(x)\,dx$.

Interprétation géométrique de la valeur moyenne

Le plan est muni d'un repère orthogonal.
Soit f une fonction continue et positive sur $[a,b]$.
L'aire $($en u.a$)$ de la partie du plan limitée par la courbe de f, les droites d'équations, $x=a$, $x=b$ et $y=0$ est égale à celle du rectangle de côtés $(b-a)$ et $\bar{f}$.



Activité 3

Soit la fonction définie sur $[0,2]$, par $f(x)=3x-1$.

Calculer la valeur moyenne de f sur $[0,2]$, puis la comparer à f(1).

Activité 4

Calculer la valeur moyenne de la fonction f définie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, par $f(x)=\cos x$.

Théorème (Inégalité de la moyenne)

Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ tel que $a<b$. Soit m et M deux réels.
Si pour tout x de $[a,b]$, $m \le f(x) \le M$, alors $m \le \overline{f} \le M$.

Démonstration

L'hypothèse $m \le f(x) \le M$, pour tout x de $[a,b]$ implique que

$$\int_a^b m\,dx \le \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b M\,dx.$$

Le théorème découle alors des égalités $\int_a^b m\,dx = m(b-a)$ et $\int_a^b M\,dx = M(b-a)$,

sachant que $b-a>0$.

Corollaire

Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ tel que $a<b$. Il existe $c \in [a,b]$, tel que $\overline{f} = f(c)$.

Démonstration

La fonction f étant continue sur $[a,b]$, on en déduit qu'il existe deux réels m et M tels que $f([a,b])=[m,M]$. Le corollaire en découle, sachant que $m \le \overline{f} \le M$.

Exercice résolu 4

Montrer les inégalités ci-dessous.

$$0.5 \le \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx \le 1, \qquad \frac{1}{2} \le \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx \le \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Solution

Remarquons que $0.5 \le \frac{1}{1+x^2} \le 1$, pour tout $0 \le x \le 1$.

On en déduit que $\int_0^1 0.5\,dx \le \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx \le \int_0^1 1\,dx$.

Le résultat découle des égalités $\int_0^1 0.5\,dx = 0.5$ et $\le \int_0^1 1\,dx = 1$.

De même, $\frac{3}{4} \le 1-x^2 \le 1$ pour tout $0 \le x \le \frac{1}{2}$.

On en déduit que $1 \leq \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \leq \frac{2}{\sqrt{3}}$, pour tout $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$.

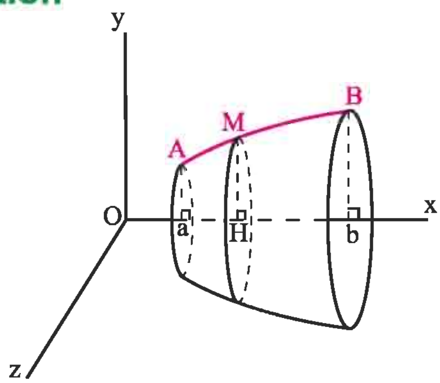
Il en résulte que $\int_0^{\frac{1}{2}} 1 dx \leq \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \leq \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{2}{\sqrt{3}} dx$.

Le résultat découle des égalités $\int_0^{\frac{1}{2}} 1 dx = \frac{1}{2}$ et $\leq \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{2}{\sqrt{3}} dx = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

V. Calcul de volumes de solides de révolution

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère dans le plan (Oxy), un arc $\overset{\frown}{AB}$ d'une courbe d'équation $y = f(x)$ et dont les extrémités A et B ont pour coordonnées dans ce plan $A(a, f(a))$ et $B(b, f(b))$.



La rotation de l'arc $\overset{\frown}{AB}$ autour de l'axe (Ox) engendre une surface appelée surface de révolution (S). (voir figure ci-contre).

En particulier chaque point $M(x, f(x))$ de l'arc $\overset{\frown}{AB}$ décrit un cercle d'axe (Ox), de centre H le projeté orthogonal de M sur (Ox) et de rayon $HM = |f(x)|$.

La partie de l'espace limitée par la surface (S) et les plans d'équations $x = a$ et $x = b$ est appelée solide de révolution de surface (S).

La section du solide par le plan passant par M et perpendiculaire à l'axe $(O, \vec{i})$ est le disque de centre H et de rayon HM.

L'aire de ce disque est $S(x) = \pi y^2 = \pi f^2(x)$.

Nous donnons ci-dessous la formule donnant le volume du solide de révolution engendré par la rotation d'un arc de courbe autour de l'axe $(O, \vec{i})$.

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Soit f une fonction continue et positive sur $[a, b]$. Le volume V du solide de révolution engendré par la rotation de l'arc $\overset{\frown}{AB} = \{M(x, y) \text{ tels que } y = f(x) \text{ et } a \leq x \leq b\}$ autour de l'axe $(O, \vec{i})$ est le réel $V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$.

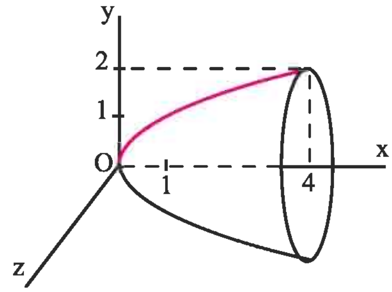
Activité

Le solide de révolution S est obtenu en faisant tourner au tour de (Ox) l'arc $\overset{\frown}{AB}$ de la courbe d'équation $y=\sqrt{x}$ et dont les extrémités A et B ont pour coordonnées dans le plan (Oxy)

$A\begin{cases}x=0\\y=0\end{cases}$, $B\begin{cases}x=4\\y=2\end{cases}$

(voir figure).

Déterminer le volume du solide S.



VI. Fonctions définies par une intégrale

Théorème

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et a un réel de I. Alors la fonction F définie sur I par $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ est la primitive de f qui s'annule en a.

Démonstration

Pour toute primitive G de f sur I et pour tout x de I , $\int_a^x f(t)dt=G(x)-G(a)$.

On en déduit que la fonction $F:x\mapsto\int_a^x f(t)dt$ est dérivable sur I et $F'=f$.

Le théorème en découle sachant que $F(a)=\int_a^a f(t)dt=0$.

Corollaire

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et a un réel de I. Alors la fonction $F:x\mapsto\int_a^x f(t)dt$ est dérivable sur I et $F'(x)=f(x)$, pour tout x de I.

Activité 1

Justifier, dans chacun des cas, la dérivabilité de la fonction F sur I et calculer sa fonction dérivée.

1. $F(x)=\int_1^x \sqrt{1-t^2}\,dt$, $I=[-1,1]$.
2. $F(x)=\int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt$, $I=\mathbb{R}$.
3. $F(x)=\int_1^x \frac{\sin t}{t}dt$, $I=]0,+\infty[$.
4. $F(x)=\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$, $I=]-1,1[$.

Activité 2

Soit f une fonction continue sur un intervalle I centré en 0.

On considère la fonction g définie sur I par $g(x)=\int_{-x}^{x} f(t)dt$.

1. Montrer que g est dérivable sur I et calculer sa dérivée.

2. On suppose que f est impaire.
   a. Montrer que pour tout $x \in I$, $g(x)=0$.
   b. En déduire que pour tout $x \in I$, $\int_{-x}^{0} f(t)dt = -\int_{0}^{x} f(t)dt$.
3. On suppose que f est paire.
   a. Montrer que g est la primitive sur I qui s'annule en 0, de la fonction $t \mapsto 2f(t)$.
   b. En déduire que $\int_{-x}^{x} f(t)dt = 2\int_{0}^{x} f(t)dt$ et que $\int_{-x}^{0} f(t)dt = \int_{0}^{x} f(t)dt$.

Théorème

Soit f une fonction continue sur un intervalle I centré en 0 et soit a un réel de I.

- Si f est impaire alors $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$.
- Si f est paire alors $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$.

Activité 3

Calculer les intégrales ci-dessous.

$$\int_{-5\pi}^{5\pi} x^5 \sin^6(x)dx \ , \ \int_{-1}^{1} \frac{t^5}{t^6+1}dt \ , \ \int_{-5\pi}^{5\pi} x^{1001} \cos^{100}(x)dx \ , \ \int_{-1}^{1} \left|t^3+t\right|dt .$$

Activité 4

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$, périodique de période T.

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=\int_{x}^{x+T} f(t)dt$.

Montrer que pour tout réel x, $g(x)=\int_{0}^{T} f(t)dt$.

Théorème

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$, périodique de période T.

Pour tout réel a, $\int_{a}^{a+T} f(t)dt = \int_{0}^{T} f(t)dt$.

Activité 5

Calculer les intégrales $\int_{0}^{20\pi}|\sin x|dx$; $\int_{-10\pi}^{10\pi}|\cos x|dx$.

Exercice résolu 5

Soit F la fonction définie sur $[1,+\infty[$ par $F(x)=\int_{1}^{x}\frac{1-\cos t}{t^2}dt$.

1. a. Montrer que F est croissante sur $[1,+\infty[$.

   b. Montrer que F est majorée par 2.
   c. En déduire que F admet une limite finie L au voisinage de $+\infty$.

2. Soit G la fonction définie sur $[1,+\infty[$ par $G(x)=\int_{1}^{x}\frac{\sin t}{t}dt$.

Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que $G(x)=F(x)+\frac{1-\cos x}{x}+\cos 1-1$.

En déduire que G possède une limite finie en $+\infty$, que l'on déterminera en fonction de L.

Solution

1. a. Sur $[1,+\infty[$, la fonction F est la primitive qui s'annule en 1 de la fonction

$t\mapsto\frac{1-\cos t}{t^2}$. De plus, la fonction $t\mapsto\frac{1-\cos t}{t^2}$ est positive sur $[1,+\infty[$ car $0\le\cos t\le 1$.

On en déduit que pour tout $x\ge 1$, $F'(x)=\frac{1-\cos x}{x^2}$ et par suite F est croissante sur $[1,+\infty[$.

b. Pour tout $t\ge 1$, $\left|\frac{1-\cos t}{t^2}\right|\le\frac{2}{t^2}$. Il en résulte que $\left|\int_{1}^{x}\frac{1-\cos t}{t^2}dt\right|\le 2\int_{1}^{x}\frac{1}{t^2}dt$, $x\ge 1$.

De plus $2\int_{1}^{x}\frac{1}{t^2}dt=2\left[-\frac{1}{t}\right]_{1}^{x}=2-\frac{2}{x}$. Le résultat en découle.

c. La fonction F est croissante et majorée sur $[1,+\infty[$. On en déduit qu'elle admet une limite finie L en $+\infty$.

2. Posons $u(t)=\frac{1}{t}$ $\qquad u'(t)=-\frac{1}{t^2}$

$v'(t)=\sin t$ $\qquad v(t)=1-\cos t$

On peut alors écrire $\int_{1}^{x}\frac{\sin t}{t}dt=\left[\frac{1-\cos t}{t}\right]_{1}^{x}+\int_{1}^{x}\frac{1-\cos t}{t^2}dt$.

On en déduit que $G(x)=F(x)+\frac{1-\cos x}{x}+\cos 1-1$, pour tout x de $[1,+\infty[$.

On sait que F admet une limite finie L en $+\infty$.

De plus $\lim\limits_{x\to+\infty}\left|\dfrac{1-\cos x}{x}\right|=0$ car $0\le\left|\dfrac{1-\cos x}{x}\right|\le\dfrac{2}{x}$, pour tout $x\ge 1$.

On en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty} G(x)=L+\cos 1-1$.

Exercice résolu 6

On considère la fonction f définie sur $[0,\ 1[$ par $f(x)=\displaystyle\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$.

1. Montrer que f est dérivable sur $[0,\ 1[$ et déterminer sa fonction dérivée f'.

2. Soit g la fonction définie sur $\left[0,\ \dfrac{\pi}{2}\right[$ par $g(x)=\displaystyle\int_0^{\sin x}\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$.

   a. Montrer que g est dérivable sur $\left[0,\ \dfrac{\pi}{2}\right[$ et déterminer sa fonction dérivée.

   b. En déduire que $g(x)=x$ pour tout $x\in\left[0,\ \dfrac{\pi}{2}\right[$.

3. Calculer les intégrales $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$; $\displaystyle\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$.

4. a. Montrer que pour tout $x\in[0,1[$ il existe un unique $t\in\left[0,\ \dfrac{\pi}{2}\right[$ vérifiant $\sin t=x$.

   b. Montrer que $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=\dfrac{\pi}{2}$.

5. Représenter la fonction f.

Solution

1. La fonction $t\mapsto 1-t^2$ est strictement positive et continue sur $[0,1[$.

On en déduit que la fonction $t\mapsto\dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ est continue sur $[0,1[$.

Il en résulte que la fonction $f: x\mapsto\displaystyle\int_0^x\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$ est dérivable sur $[0,1[$, puis

que $f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $x\in[0,1[$.

2. a. La fonction $u : x \mapsto \sin x$ est dérivable et croissante sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, on en déduit que $u\left(\left[0, \frac{\pi}{2}\right[\right) = [0,1[$. Il en résulte que la fonction g est dérivable sur $[0,1[$ comme composée des fonctions dérivables f et de u.

De plus, $g'(x) = u'(x) \times f'(u(x)) = \frac{\cos x}{\sqrt{1-\sin^2 x}} = 1$, car $\sqrt{1-\sin^2 x} = \cos x$, $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$.

b. On déduit de a, que pour tout x de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, $g(x) = x + c$, où c est une constante.

L'égalité $g(0) = 0$ implique que $g(x) = x$ pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$.

3. On sait que $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ et $\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Il en résulte que

$$g\left(\frac{\pi}{6}\right) = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{\pi}{6} \text{ et } g\left(\frac{\pi}{3}\right) = \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{\pi}{3}.$$

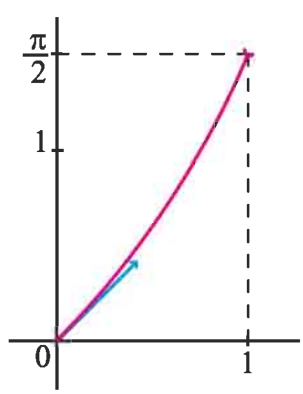
4. a. La fonction $x \mapsto \sin x$ étant continue et strictement croissante sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, elle réalise une bijection de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ sur $[0, 1[$. Ce qui prouve que l'équation $\sin t = x$ admet une unique solution dans $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$.

b. On déduit de la question précédente que $\lim\limits_{x \mapsto 1^-} f(x) = \lim\limits_{t \mapsto \frac{\pi}{2}^-} f(\sin t) = \lim\limits_{t \mapsto \frac{\pi}{2}^-} g(t) = \frac{\pi}{2}$.

Tableau de variation de f.

x	0		1
$f'(x)$		$+$	
f	0	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}$

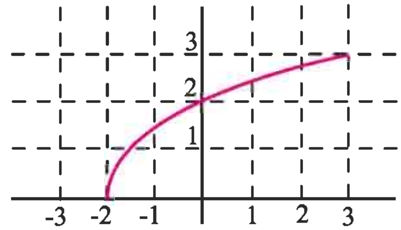
Représentation graphique de f.



QCM

Cocher la réponse exacte.

1. D'après la représentation graphique ci-contre, l'aire de la partie limitée par la courbe de f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=-2$ et $x=3$ est comprise entre



□ 7 et 13. □ 15 et 20. □ 14 et 21.

2. Soit $I=\int_0^1 t\cos^2(\pi t)\,dt$ et $J=\int_0^1 t\sin^2(\pi t)\,dt$. Alors $I+J$ est égal à

□ 1. □ $\frac{1}{2}$. □ 0.

3. Soit $I=\left|\int_{-1}^{1} -3x^3+5x\,dx\right|$ et $J=\int_{-1}^{1}\left|-3x^3+5x\right|dx$. Alors

□ $I \leq J$. □ $I = J$. □ $I \geq J$.

VRAI – FAUX

Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse.

1. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx = \int_{4\pi}^{\frac{9\pi}{2}} \sin x\,dx$.

2. $\int_{-1}^{1} |x|\,dx = 1$.

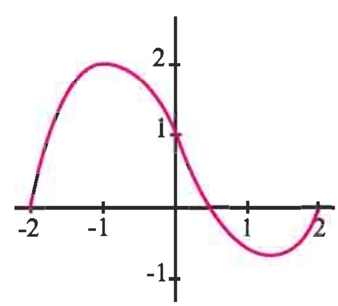
3. Si f est une fonction dérivable sur $[a, b]$ et si sa dérivée est continue sur $[a, b]$, alors

$\int_a^b f(x)\,dx = [xf(x)]_a^b - \int_a^b x f'(x)\,dx$.

4. Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[0, 1]$.

Si $f \leq 1$ alors $\int_0^1 f(x)\,dx \leq 1$.

5. D'après la représentation graphique ci-contre $\int_{-2}^{2} f(x)\,dx \geq 0$.



6. Si $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$ alors $f \geq 0$ sur $[a, b]$.

7. La fonction $x \mapsto \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt$ est définie sur $\mathbb{R}$.

1 Calculer les intégrales ci-dessous.

$\int_{-1}^{3}\left(\frac{x^2}{2}-x\right)dx$; $\int_{1}^{2} t(t+1)^3 dt$;

$\int_{-1}^{1}(2x+1)(x^2+x-5)^3 dx$; $\int_{1}^{2}\sqrt{2x+1}\,dx$;

$\int_{1}^{2}\frac{dx}{(1+x)^2}$; $\int_{1}^{2}\frac{2}{(3x-1)^2}dx$; $\int_{0}^{4}\frac{dx}{\sqrt{2x+1}}$;

$\int_{1}^{2}\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x}}dx$; $\int_{-2}^{1}|x(x+1)|dx$; $\int_{-3}^{3}|x^3+x|dx$;

$\int_{0}^{3}|2t-1|dt$; $\int_{-3}^{0}|x^2-x-2|dx$; $\int_{0}^{\pi}\cos^3 x dx$;

$\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\tan^2 x dx$; $\int_{0}^{\frac{\pi}{6}}\frac{\sin 2x}{\cos^3 2x}dx$; $\int_{0}^{\frac{\pi}{6}}\frac{\sin x}{\cos^2 x}dx$

$\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\cos^4 t\,\sin t\,dt$; $\int_{0}^{2\pi}|\sin x|dx$.

2 1. Déterminer deux réels a et b tels que

$\frac{6x^2-12x+42}{(x-1)^2}=a+\frac{b}{(x-1)^2}$, pour tout $x\neq 1$.

2. Calculer $\int_{-1}^{0}\frac{6x^2-12x+42}{(x-1)^2}dx$.

3 Soit f la fonction définie par $f(x)=\frac{x}{(x-1)^4}$, pour tout $x\neq 1$.

1.Montrer qu'il existe deux réels a et b tels que

$f(x)=\frac{a}{(x-1)^3}+\frac{b}{(x-1)^4}$, pour tout $x\neq 1$.

2. Calculer alors $\int_{2}^{3}\frac{x+1}{(x-1)^4}dx$.

4 On considère les intégrales $A=\int_{0}^{1}\frac{x}{(1+x^2)^3}dx$

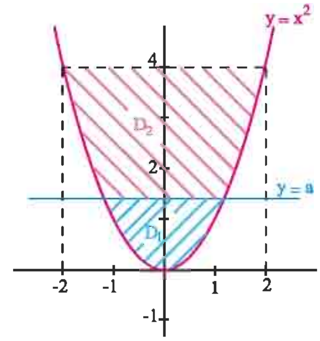
et $B=\int_{0}^{1}\frac{x^3}{(1+x^2)^3}dx$.

1. Calculer A.
2. Calculer $A+B$.
3. En déduire la valeur de B.

5 le plan est muni d'un repère orthonormé.

Soit $a>0$.

Pour quelle valeur de a, les parties D_1 et D_2 ont-elles la même aire ?



6 Soit la fonction $f: x\mapsto\frac{x^2-4x-2}{(x-2)^2}$

1. Vérifier que $f(x)=1-\frac{6}{(x-2)^2}$, $x\neq 2$.

2. Etudier f et construire sa courbe représentative C dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

3. Calculer l'aire de la partie du plan limitée par l'axe des abscisses, la courbe C et les droites d'équations respectives $x=3$ et $x=5$.

7 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ par

$f(x)=\frac{2x-1}{(x-1)^3}$.

On désigne par C sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. Etudier f et tracer C.
2. Montrer qu'il existe deux réels a et b tels que

$f(x)=\frac{a}{(x-1)^2}+\frac{b}{(x-1)^3}$, pour tout $x\neq 1$.

3. Soit $\lambda<\frac{1}{2}$. On pose $\mathcal{A}(\lambda)$ l'aire de la partie du plan limité par la courbe C, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=\lambda$ et $x=\frac{1}{2}$.

a. Déterminer $\mathcal{A}(\lambda)$.

b. Calculer $\lim\limits_{\lambda\to-\infty}\mathcal{A}(\lambda)$.

8 1. On considère la fonction h définie sur $]0, +\infty[$ par $h(x)=x^2-4x+6-3\sqrt{x}$.

a. Calculer $h''(x)$, $x>0$.

b. Montrer que l'équation $h'(x)=0$ possède une unique solution α appartenant à $]2, 3[$.

c. Déterminer le signe de h' et dresser le tableau de variation de h.

d. Calculer $h(1)$ et $h(4)$. En déduire que 1 et 4 sont les uniques solutions de l'équation $h(x)=0$.

2. a. Représenter dans un repère orthonormé, les fonctions f et g définies sur $]0, +\infty[$ par $f(x)=x^2-4x+6$ et $g(x)=3\sqrt{x}$.

b. Calculer l'aire de la partie limitée par ces deux courbes.

9 Le plan est muni d'un repère orthonormé.

On considère les fonctions f et g définies sur $[0, \pi]$ définies par $f(x)=\cos x$ et $g(x)=\cos^2 x$.

1. Etudier les fonctions f et g.
2. Etudier la position des courbes C_f et C_g de f et g.
3. Représenter C_f et C_g.
4. Calculer l'aire de la partie limitée par ces deux courbes.

10 1.Soit les fonctions f et g définies sur $]0, +\infty[$ par $f(x)=5-x^2$ et $g(x)=\dfrac{4}{x^2}$ et C, C' leurs courbes représentatives respectives.

1. Etudier la position relative de C et C'.

2. Représenter f et g dans un repère orthonormé.

3. Calculer l'aire de la partie limitée par les deux courbes et les droites d'équations $x=0.5$ et $x=5$.

11 1. Représenter dans un repère orthonormé, les fonctions f et g définies sur $]2, +\infty[$ par

$f(x)=x+1+\dfrac{4}{(x-2)^2}$ et $g(x)=x+1$.

2. Soit $\lambda>2$. On pose $A(\lambda)$ l'aire de la partie du plan limitée par les courbes de f et g et les droites d'équations $x=3$ et $x=\lambda$.

a. Vérifier que $A(\lambda)=\left|\displaystyle\int_3^{\lambda}\frac{4dx}{(x-2)^2}\right|$.

b. Calculer $A(\lambda)$.

c. Etudier et représenter la fonction $A:\lambda\mapsto A(\lambda)$.

d. Déterminer suivant les valeurs de m, le nombre de solutions de l'équation $A(\lambda)=m$.

12 1. A l'aide d'une intégration par parties calculer les intégrales $\displaystyle\int_0^{\pi}x\cos x\,dx$ et $\displaystyle\int_0^{\pi}x\sin x\,dx$

2. En déduire les valeurs des intégrales

$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^2\cos x\,dx$ et $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^2\sin x\,dx$.

13 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par

$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^4}}$ et on pose $I=\displaystyle\int_{100}^{1000}f(t)dt$.

1. a. Vérifier que pour tout $x>0$, $f(x)\le\dfrac{1}{x^2}$.

b. Montrer en utilisant l'inégalité des accroissements finis que pour tout $x>0$ $1-\dfrac{x}{2}\le\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$.

c. Montrer alors que pour tout $x>0$,

$\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{2x^6}\le f(x)$.

2. Déterminer un encadrement de I.

14 1. Calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{\cos^2 x}$.

2. Soit la fonction f définie sur $\left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$ par

$f(x)=\dfrac{\sin x}{\cos^3 x}$. Montrer que pour tout $x\in\left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$,

$f'(x)=\dfrac{3}{\cos^4 x}-\dfrac{2}{\cos^2 x}$.

3. Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{\cos^4 x}$.

15 On considère la fonction f définie sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ par $f(x)=\frac{1}{\sin^2 x}$.

1. Montrer que $f(x)=\frac{1+\tan^2 x}{\tan^2 x}$, $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

2. Montrer que f réalise une bijection de $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ sur un intervalle I que l'on précisera.

3. Montrer que la réciproque f^{-1} de f est dérivable sur I et que $\left(f^{-1}\right)'(x)=-\frac{1}{2\sqrt{x^3-x}}$, pour tout x de I.

4. Calculer l'intégrale $\int_{\frac{4}{3}}^{2} \frac{dt}{2\sqrt{t^3-t}}$.

16 1. Représenter dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$, la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\frac{x^2}{1+x^2}$.

2. Soit $\mathcal{A}$ l'aire de la partie du plan limitée par la courbe de f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=1$ et $x=2$.

a. Vérifier que $\frac{1}{2} \le \mathcal{A} \le 1$.

b. Utiliser la méthode des rectangles, en partageant l'intervalle $[1,2]$ en cinq intervalles d'amplitude 0.2, pour donner un nouvel encadrement de $\mathcal{A}$.

17 Soit la suite (u_n) définie par

$$u_n=\int_0^1 \frac{x^n}{\left(x^2+1\right)^2}dx,\ n \ge 1.$$

1. Montrer que $0 \le \frac{x^{2n+1}}{\left(x^2+1\right)^2} \le x^{2n+1}$, pour tout entier $n \ge 1$ et tout $0 \le x \le 1$.

2. En déduire que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite.

18 On pose pour tout n entier naturel non nul,

$$J_n=\int_0^1 x^n\sqrt{1+x}\,dx$$

1. A l'aide d'un encadrement de $\sqrt{1+x}$ établir que $\frac{1}{n+1} \le J_n \le \frac{\sqrt{2}}{n+1}$.

En déduire la limite de la suite J_n

2. a. Montrer que pour tout x de $[0, 1]$, $0 \le \sqrt{2}-\sqrt{1+x} \le \frac{1}{2}(1-x)$.

b. En déduire que $\frac{\sqrt{2}}{n+1}-\frac{1}{2n^2} \le J_n \le \frac{\sqrt{2}}{n+1}$.

c. Déterminer la limite de la suite (nJ_n).

19 Soit la suite (u_n) définie par

$$u_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}} x^n \cos 2x\,dx,\ n \ge 0.$$

1. Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

2. Comparer u_n et $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x^n dx$, $n \ge 1$.

3. En déduire que (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

4. a. Calculer u_0 et u_1.

b. Exprimer u_{n+2} en fonction de u_n.

c. Calculer u_2 et u_3.

20 Soit la suite (u_n) définie par $u_n=\int_0^1 \frac{dx}{1+x^n}$, $n \ge 1$.

1. Etablir que $1-u_n=\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n}dx$, $n \ge 1$.

2. Montrer que $0 \le 1-u_n \le \frac{1}{n+1}$, $n \ge 1$.

3. En déduire que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite.

21 Soit la suite (I_n) définie par

$$I_n = \int_0^{\pi} \sin^n x\, dx .$$

1. Calculer I_0 et I_1.
2. Montrer que pour tout entier naturel n, $(n+2)I_{n+2} = (n+1)I_n$.
En déduire les valeurs de I_2 et I_3.
3. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = (n+1)I_n I_{n+1}$.
a. Calculer $u_{n+1} - u_n$ et en déduire que la suite (u_n) est constante.
b. Donner la valeur de u_n.
4. Montrer que la suite (I_n) est décroissante.
5. a. Déduire que $\dfrac{\pi}{2(n+1)} \leq I_n^2 \leq \dfrac{\pi}{2n}$, $n \geq 1$.
b. Donner un encadrement de I_{1000}.

22 Soit f la fonction définie sur $\left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$ par

$f(x) = \tan^3 x + \tan x$.

1. Etudier les variations de f.
2. Montrer que la fonction f réalise une bijection de $\left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$ sur $[0,2]$.
3. a. Représenter dans un repère orthonormé, les fonctions f et f^{-1} en précisant les demi tangentes aux extrémités des deux courbes.
b. Calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)dx$. En déduire $\displaystyle\int_0^{2} f^{-1}(x)dx$.

23 On considère la fonction f définie sur $[0,3]$

par $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in [0,1], \\ \dfrac{1}{x^2} & \text{si } x \in]1,3]. \end{cases}$

1. Vérifier que f est continue sur $[0,3]$.
2. Soit F la fonction définie sur $[0,3]$ par

$$F(x) = \int_0^{x} f(t)dt .$$

a. Expliciter $F(x)$, $x \in [0,3]$.
b. Représenter la fonction F dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

24 On pose pour tout entier naturel n,

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{n+2} x\, dx .$$

1. a. Calculer I_0.
b. Vérifier que pour tout n, $0 \leq I_{n+1} \leq I_n$.
c. En déduire que la suite (I_n) est convergente.
2. a. Montrer que pour tout n, $I_n + I_{n+2} = \dfrac{1}{n+3}$.
b. En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n$.
c. Calculer I_2 et I_4.

25 Dans chacun des cas, calculer la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle I.
1. $f : x \mapsto x^4 - x^3 + 1$, $\quad I = [-1, 3]$.
2. $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^3} - 1$, $\quad I = [2, 4]$.
3. $f : x \mapsto \sin(2x)$, $\quad I = [0, \pi]$.

26 En utilisant l'inégalité de la moyenne donner un encadrement de $\displaystyle\int_2^{4} \frac{dx}{x^2 - x + 1}$.

27 En utilisant l'inégalité de la moyenne donner un encadrement de $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{3 + \tan^2 x}$.

Dans les exercices 31, 32, 33, 34 et 35 L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

28 Soit $C = \left\{M(x, y) \text{ tels que } y = x^2,\ 0 \leq x \leq 2\right\}$ et S le solide obtenu par rotation de C autour de l'axe (Ox). Calculer le volume de S.

29 Soit $C = \left\{M(x, y) \text{ tels que } y = \dfrac{1}{x},\ 1 \leq x \leq 3\right\}$ et S le solide obtenu par rotation de C autour de l'axe (Ox). Calculer le volume de S.

30 Soit

$C=\left\{M(x,\ y)\text{tels que } y=\tan x,\ 0\le x\le\frac{\pi}{4}\right\}$ et S le solide obtenu par rotation de C autour de l'axe (Ox). Calculer le volume de S.

31 Soit

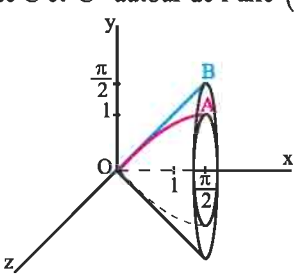
$C=\left\{M(x,y)\text{ tels que } y=\sin x+\cos x,\ 0\le x\le\frac{\pi}{2}\right\}$ et S le solide obtenu par rotation de C autour de l'axe (Ox). Calculer le volume de S.

32 Soit

$C=\left\{M(x,\ y)\text{ tels que } y=\sin x,\ 0\le x\le\frac{\pi}{2}\right\}$

et $C'=\left\{M(x,\ y)\text{ tels que } y=x,\ 0\le x\le\frac{\pi}{2}\right\}$.

On note S et S' les solides obtenus respectivement par rotation de C et C' autour de l'axe (Ox).



Calculer le volume de la partie de l'espace comprise entre les solides S et S'.

33 I. On considère la fonction F définie sur $\left[0,\ \frac{\pi}{4}\right]$ par $F(x)=\int_0^{\tan x}\frac{dt}{1+t^2}$.

1. Vérifier que F est dérivable sur $\left[0,\ \frac{\pi}{4}\right]$ et déterminer sa fonction dérivée.

2. En déduire que pour tout $x\in\left[0,\ \frac{\pi}{4}\right]$, $F(x)=x$.

3. Calculer $\int_0^1\frac{dt}{1+t^2}$.

II. On considère la suite (J_n) définie par

$J_0=\int_0^1\frac{dt}{1+t^2}$ et $J_n=\int_0^1\frac{t^{2n}}{1+t^2}dt$, $n\ge1$.

1. a. Vérifier que pour tout n, $0\le J_n\le\frac{1}{1+2n}$.

b. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} J_n$.

2 a. Montrer que pour tout n, $J_{n+1}+J_n=\frac{1}{1+2n}$.

b. Calculer J_k, pour tout entier naturel $1\le k\le6$.

34 On considère la fonction F définie sur $\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$ par $F(x)=\int_0^{\sin x}\sqrt{1-t^2}\,dt$.

1. Vérifier que F est dérivable sur $\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$ et déterminer sa fonction dérivée.

2. En déduire que pour tout $x\in\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$,

$F(x)=\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sin(2x)$.

3. Calculer $\int_0^1\sqrt{1-t^2}\,dt$.

4. Etudier les variations de F.

5. Tracer la courbe représentative de F dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

35 On considère la fonction f définie sur $[-2,2]$ par $f(x)=x+\sqrt{4-x^2}$.

1. Etudier f et représenter sa courbe C dans un repère orthonormé.

2. Soit F la fonction définie sur $[0,\ \pi]$ par

$F(x)=\int_0^{2\cos x}\sqrt{4-t^2}\,dt$.

a. Montrer que F est dérivable sur $[0,\ \pi]$ et que $F'(x)=-4\sin^2 x$, $x\in[0,\ \pi]$.

b. Calculer $F\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

c. En déduire que pour tout $x\in[0,\pi]$, $F(x)=-2x+\sin(2x)+\pi$.

3. Soit $\mathcal{A}$ l'aire de la partie du plan limité par la courbe C, l'axe des abscisses et les droites d'équations, $y=x$, $x=-2$ et $x=2$.

a. Montrer que $\mathcal{A}=F(0)-F(\pi)$.

b. En déduire $\mathcal{A}$.

Chapitre 8

Fonction logarithme népérien

M.Stifel (1544) met en évidence les deux suites

...	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	...	8
...	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	0	1	4	8	16	...	256

Le passage de la ligne inférieure ("in inferiore ordine") à la ligne supérieure ("in superioreordine") transforme les produits en sommes. Par exemple, au lieu de multiplier 8 par 32 "in inferiore ordine", on peut prendre les "logarithmes" correspondants 3 et 5 "in superioreordine", calculer leur somme, qui est 8, retourner "in inferiore ordine", où l'on trouve le produit 8.32=256. Cette table plus détaillée, serait d'une grande utilité, car additionner est plus facile que multiplier. Les premières tables logarithmiques [...] ont été calculées par John Napier (1614, 1619), Henry Briggs (1624) et Jost Burgi (1620).

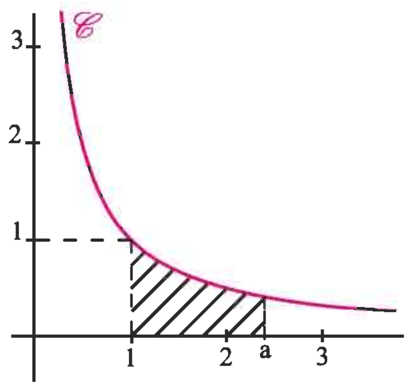
(E.Haier et al,L'analyse au fil
de l'histoire, 2000).

Chapitre 8

Fonction logarithme népérien

I. Introduction

Activité 1



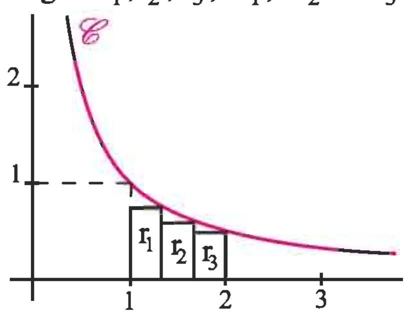
A/ Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on a construit la courbe de la fonction

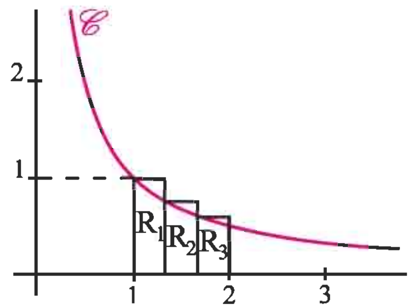
$$f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$$
$$t \mapsto \frac{1}{t}$$

Pour tout réel $a > 0$, on désigne par $S(a)$ l'aire de la partie du plan limitée par la courbe de f, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = a$.

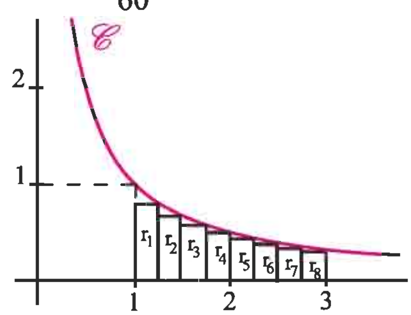
1. Que vaut $S(1)$?

2. a. On partage l'intervalle $[1,2]$ en trois intervalles de même amplitude et on construit les rectangles r_1, r_2, r_3, R_1, R_2 et R_3 comme l'indique les deux figures ci-dessous.



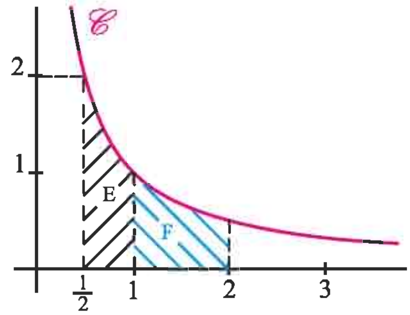


On désigne par $\mathcal{A}$ (respectivement $\mathcal{A}'$) la somme des aires des rectangles r_i (respectivement R_i), $1 \le i \le 3$. Montrer que $\frac{37}{60} \le S(2) \le \frac{47}{60}$.



b. On partage l'intervalle $[1,3]$ en huit intervalles de même amplitude et on construit les rectangles r_i, $1 \le i \le 8$, comme l'indique la figure ci-contre.
Calculer la somme des aires des rectangles r_i, $1 \le i \le 8$ et vérifier que $S(3) \ge 1$.

c. Montrer que $S(2.5) \leq 1$.



3. a. Soit $E = \left\{ M(x,y) \text{ avec } \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \text{ et } 0 \leq y \leq \frac{1}{x} \right\}$ et

$F = \left\{ M(x,y) \text{ avec } 1 \leq x \leq 2 \text{ et } 0 \leq y \leq \frac{1}{x} \right\}$.

Montrer que E et F ont même aire.

b. En déduire que $S\left(\frac{1}{2}\right) = S(2)$.

B/ Pour tout réel $x > 0$, on pose $F(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt$.

1. a. Montrer que $F(x) > 0$, si et seulement si, $x > 1$.

b. Exprimer $F(x)$ à l'aide de $S(x)$.

2. Justifier la dérivabilité de F sur $]0,+\infty[$ et calculer $F'(x)$.

En déduire que F est strictement croissante sur $]0,+\infty[$.

3. Montrer qu'il existe un unique réel e appartenant à $]2,3[$ tel que $F(e) = 1$.

Définition

On appelle fonction logarithme népérien et on note ln, la fonction

$x \mapsto \ln x = \int_1^x \frac{1}{t} dt, \; x > 0.$

Les résultats suivants découlent immédiatement de la définition précédente.

La fonction logarithme népérien est la primitive sur $]0,+\infty[$ de la fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$, qui s'annule en 1.

La fonction ln est définie, continue, dérivable sur l'intervalle $]0,+\infty[$ et $\ln'(x) = \frac{1}{x}, \; x > 0$.

La fonction ln est strictement croissante sur $]0,+\infty[$ et $\ln 1 = 0$.

Il existe un unique réel x appartenant à $]2,3[$ tel que $\ln(x) = 1$.

Il en résulte que

Soit a et b deux réels strictement positifs.

$\ln a > \ln b$, si et seulement si, $a > b$.

$\ln a = \ln b$, si et seulement si, $a = b$.

$\ln a = 0$, si et seulement si, $a = 1$.

$\ln a > 0$, si et seulement si, $a > 1$.

$\ln a < 0$, si et seulement si, $0 < a < 1$.

Activité 2

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$, les équations ci-dessous.

   a. $\ln(x+1)=0$. b. $\ln(1-x)=\ln(2+x)$.

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$, les inéquations ci-dessous.

   a. $\ln(x-1)\leq 0$. b. $\ln(4-3x)>0$. c. $\ln\left(x^2+1\right)\geq 0$. d. $\ln(2x-5)\leq \ln x$.

II. Etude et représentation graphique de la fonction ln

On se propose d'étudier la fonction ln et de construire sa courbe représentative C dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

Activité 1

1. Soit un entier $n\geq 1$.

   a. Montrer que $\frac{1}{t}\geq\frac{1}{2^{n+1}}$, pour tout réel t vérifiant $2^n\leq t\leq 2^{n+1}$.

   b. En déduire que $\int_{2^n}^{2^{n+1}}\frac{1}{t}dt\geq\frac{1}{2}$.

2. Vérifier que $\int_1^{2^n}\frac{1}{t}dt=\int_1^2\frac{1}{t}dt+\int_2^{2^2}\frac{1}{t}dt+\ldots+\int_{2^{n-1}}^{2^n}\frac{1}{t}dt$, pour tout entier $n\geq 1$.

3. a. Montrer que $\int_1^{2^n}\frac{1}{t}dt\geq\frac{n}{2}$, pour tout entier $n\geq 1$.

   b. En déduire que la fonction ln n'est pas majorée et déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x$.

4. a. Montrer que les deux fonctions $x\mapsto\ln x$ et $x\mapsto-\ln\left(\frac{1}{x}\right)$ définies sur $]0,+\infty[$ ont même dérivée.

   b. En déduire que $\ln x=-\ln\left(\frac{1}{x}\right)$, $x>0$.

   c. Calculer alors $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x$.

Théorème

$\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$. $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x=-\infty$.

Activité 2

1. Calculer $\lim\limits_{x\mapsto 1}\frac{\ln x-\ln 1}{x-1}$.

2. Montrer que $\frac{1}{t}\leq\frac{1}{\sqrt{t}}$, pour tout $t\geq 1$.

3. Montrer que $\int_1^x \frac{1}{t}dt \leq \int_1^x \frac{1}{\sqrt{t}}dt$, pour tout $x \geq 1$.

4. Calculer $\int_1^x \frac{1}{\sqrt{t}}dt$ et en déduire que $\ln x \leq 2\sqrt{x} - 2$.

   Montrer alors que $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$.

Théorème

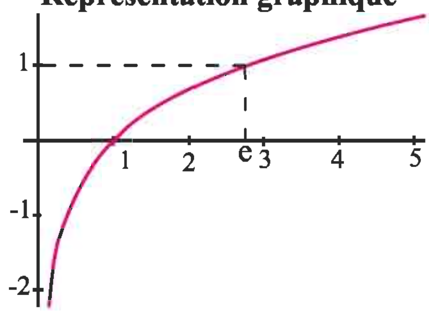
$\lim\limits_{x \to 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$. $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$.

Les activités précédentes nous permettent de dresser le tableau de variation et de représenter graphiquement la fonction ln.

Tableau de variation

x	0		$+\infty$
$(\ln)'(x)$		$+$	
$\ln$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

Représentation graphique



- La fonction ln réalise une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$.
- L'unique solution de l'équation $\ln x = 1$ est le réel noté e. Ainsi, $\ln e = 1$.

Les calculatrices donnent des valeurs approchées du réel e de sorte que $e \simeq 2.71828...$

III. Propriétés algébriques

Activité 1

1. On considère les deux fonctions f et g définies sur l'intervalle $]0, +\infty[$ par $f(x) = \ln x$, $g(x) = \ln(ax)$ où a est un réel strictement positif.
   a. Comparer $f'(x)$ et $g'(x)$.
   b. En déduire qu'il existe une constante réelle c telle que $\ln(ax) = \ln x + c$, $x > 0$.
   c. Montrer alors que $\ln(ax) = \ln a + \ln x$, $x > 0$.

2. Montrer que $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$, $a > 0$ et $b > 0$.

Nous résumons ci-dessous les propriétés algébriques de la fonction ln.

Théorème

Soit a et b deux réels strictement positifs.

- $\ln(a.b) = \ln a + \ln b$.
- $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$.
- $\ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln b$.
- Pour tout entier p, $\ln\left(a^p\right) = p\ln a$
- Pour tout entier $p \geq 2$, $\ln\left(\sqrt[p]{a}\right) = \frac{1}{p}\ln a$.

Activité 2

1. Exprimer, à l'aide des réels $\ln 2$ et $\ln 3$ chacun des réels ci-dessous.

$\ln\left(\sqrt{3}\right)$, $\ln\left(\sqrt[3]{2}\right)$, $\ln 108$, $\ln\left(\frac{81}{8}\right)$, $\ln\left(\sqrt[5]{2^3}\right)$ et $\ln\left(\sqrt{\frac{1}{27}}\right)$.

2. Simplifier les écritures ci-dessous.

$\ln\left(\sqrt{e}\right)$, $\ln\left(\frac{1}{e}\right)$, $\ln\left(e^3\right)$, $\ln\left(e^{-2}\right)$, $\ln\left(\frac{\sqrt[3]{e}}{\sqrt{e}}\right)$ et $\ln\left(\sqrt[4]{e}.\sqrt[3]{e}\right)$.

Exercice résolu 1

1. Déterminer le plus petit entier naturel n tel que $\left(\frac{1}{2}\right)^n \leq 10^{-4}$.

2. Déterminer le plus petit entier naturel n tel que $2^n \geq 10^5$.

Solution

1.La fonction ln étant strictement croissante, il en résulte que

$\left(\frac{1}{2}\right)^n \leq 10^{-4}$, si et seulement si, $\ln\left(\frac{1}{2}\right)^n \leq \ln(10^{-4})$, ce qui équivaut à $-n\ln 2 \leq -4\ln 10$.

On en déduit que $\left(\frac{1}{2}\right)^n \leq 10^{-4}$, si et seulement si, $n \geq \frac{4\ln 10}{\ln 2}$.

Ce qui est réalisé dès que $n \geq 14$.

1. D'après la croissance de la fonction ln,

$2^n \geq 10^5$, si et seulement si, $n\ln 2 \geq 5\ln 10$, ou encore, $n \geq \frac{5\ln 10}{\ln 2}$.

Ce qui est réalisé dès que $n \geq 17$.

Activité 3

Déterminer les limites ci-dessous.

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln\left(\sqrt[3]{x}\right)}{x}, \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(\sqrt[3]{x}\right)}{x}, \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{\sqrt[10]{x}}, \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(2x+3)}{3x+4}, \quad \lim_{x\to+\infty} x - \ln x .$$

IV. Autres limites

Activité 1

Soit m un entier naturel non nul et n un entier supérieur ou égal à 2.

1. a. Vérifier que $\frac{(\ln x)^n}{x^m} = \left(\frac{n}{m} \times \frac{\ln\left(\sqrt[n]{x^m}\right)}{\sqrt[n]{x^m}} \right)^n$, $x > 0$.

   b. En déduire que $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{(\ln x)^n}{x^m} = 0$.

2. Calculer $\lim\limits_{x \to 0^+} \left| x^m (\ln x)^n \right|$.

Théorème

Pour tous entiers naturels non nuls n et m, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln^n x}{x^m} = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} x^m \ln^n x = 0$.

Activité 2

Déterminer les limites ci-dessous.

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 - \ln^3 x$, $\lim\limits_{x \to 0^+} x^2 + \ln^3 x$.
2. $\lim\limits_{x \to 0^+} x^4 \left(1 - \ln^5 x\right)$, $\lim\limits_{x \to +\infty} x^4 \left(1 - \ln^5 x\right)$.

Exercice résolu 2

Soit la fonction f définie par $f(x) = \begin{cases} x^2 \ln^2 x & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$

1. Etudier la dérivabilité de f sur son ensemble de définition.
2. Etudier les variations de f et tracer sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

Solution

1. La fonction $x \mapsto \ln x$ est dérivable en tout réel $x > 0$.

On en déduit que la fonction f est dérivable en tout réel $x > 0$, comme produit de fonctions dérivables.

Pour étudier la dérivabilité de f en 0 à droite, il suffit d'étudier la limite en 0^+ du taux d'accroissement $\frac{f(x) - f(0)}{x}$.

L'égalité $\frac{f(x) - f(0)}{x} = x \ln^2 x$, $x > 0$ implique que $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 0$.

Ce qui prouve que f est dérivable à droite en 0 et que $f'_d(0) = 0$.

En conclusion, f est dérivable sur $[0, +\infty[$.

2. Le calcul donne $f'(x)=2x\ln x(\ln x+1)$, pour tout $x>0$.

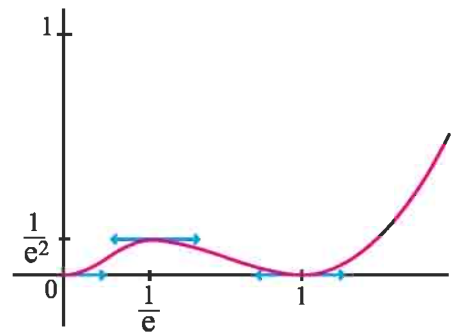
Les réels $f'(x)$ et $\ln x(\ln x+1)$ sont de même signe, pour $x>0$.

On en déduit que $f'(x)\leq 0$, si et seulement si, $\frac{1}{e}\leq x\leq 1$.

Remarquons que $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\ln^2 x=+\infty$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2\ln^2 x}{x}=+\infty$.

On en déduit que la courbe de f admet une branche parabolique de direction $(O,\vec{j})$, au voisinage de $+\infty$.

x	0		$\frac{1}{e}$		1		$+\infty$
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
f	0	$\nearrow$	$\frac{1}{e^2}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$



V. Fonctions $x\mapsto\ln(u(x))$ et $x\mapsto\ln(|u(x)|)$

Activité 1

Soit la fonction $u:x\mapsto x^2+x+2$

1. Déterminer le signe de u sur $\mathbb{R}$.

2. Soit la fonction $f:x\mapsto\ln\left(x^2+x+2\right)$.

a. Déterminer l'ensemble de définition de f.

b. Montrer que f est dérivable en tout réel de son ensemble de définition et calculer $f'(x)$.

Le théorème de dérivation des fonctions composées fournit la démonstration des théorèmes ci-dessous.

Théorème

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I et telle que $u(x)>0$, pour tout réel x dans I.

La fonction $f:x\mapsto\ln(u(x))$ est dérivable sur I et $f'(x)=\frac{u'(x)}{u(x)}$, pour tout x dans I.

Corollaire

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I et telle que $u(x) \neq 0$, pour tout réel x de I.

La fonction $f : x \mapsto \ln|u(x)|$ est dérivable sur I et $f'(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$, pour tout x de I.

Corollaire

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I et telle que $u(x) \neq 0$ pour tout réel x dans I.

Les primitives sur I de la fonction $x \mapsto \dfrac{u'(x)}{u(x)}$ sont les fonctions $x \mapsto \ln|u(x)| + k$, où k est une constante réelle.

Activité 2

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Soit la fonction $f : x \mapsto \ln\left(\dfrac{x-2}{x+1}\right) + x$

1. Dresser le tableau de variation de f.
2. Etudier la nature des branches infinies de la courbe de f.
3. Tracer la courbe de f.

Activité 3

Déterminer une primitive de la fonction f sur l'intervalle I, dans chacun des cas suivants :

1. $f(x) = \dfrac{x}{1-x^2}$, $I =]1, +\infty[$.
2. $f(x) = \dfrac{x+1}{x+3}$, $I =]-\infty, -4[$.
3. $f(x) = \dfrac{1}{x \ln x}$, $I =]0, 1[$.
4. $f(x) = \dfrac{2\cos(2x)}{\sin(2x)}$, $I = \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$.

Activité 4

Dériver la fonction $x \mapsto x \ln x$

En déduire une primitive de la fonction ln.

Théorème

La fonction $x \mapsto x \ln x - x$ est une primitive de la fonction $x \mapsto \ln x$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Activité 5

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$. Soit la fonction $f : x \mapsto 1-x+\ln x$

1. Etudier les variations de f et tracer sa courbe C_f.
2. Soit α un réel de $]0,1[$.
   a. Exprimer à l'aide de α l'aire $\mathcal{A}(\alpha)$ du domaine du plan limité par C_f, la droite des abscisses et les droites d'équations $x=\alpha$ et $x=1$.
   b. Déterminer $\lim\limits_{\alpha \to 0^+} \mathcal{A}(\alpha)$.

Activité 6

1. Déterminer les réels a et b tels que pour tout $t \in \mathbb{R}^* \setminus \{-1\}$, $\dfrac{1}{t(t+1)} = \dfrac{a}{t} + \dfrac{b}{t+1}$.
2. Calculer $\displaystyle\int_1^2 \frac{dt}{t(t+1)}$.
3. A l'aide d'une intégration par parties, donner la valeur de $\displaystyle\int_1^2 \frac{\ln(1+t)\,dt}{t^2}$.

QCM

Cocher la réponse exacte.

1. Pour tout réel $x > 0$, $\ln\left(x+x^2\right)$ est égal à

□ $\ln x + \ln(x+1)$. □ $\ln\left(x^2\right)+\ln x$. □ $3\ln x$.

2. $\ln\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$ est égal à

□ -2. □ $\frac{1}{2}$. □ $-\frac{1}{2}$.

3. Soit $f(x)=\ln(-x)$, $x<0$. Alors $f'(x)$ est égal à

□ $-\frac{1}{x}$. □ $\frac{1}{x}$. □ $-x$.

4. Soit $f(x)=x\ln\left(x^2\right)$, $x<0$. Alors $f'(x)$ est égal à

□ $2(1+\ln|x|)$. □ $2(1+\ln x)$. □ $\ln\left(x^2\right)+\frac{1}{x}$.

5. La limite de la fonction $x \mapsto \frac{\ln x}{x}$ en 0^+ est égale à

□ $+\infty$. □ $-\infty$. □ 0.

6. La limite de la fonction $x \mapsto \ln x + \frac{1}{x}$ en 0^+ est égale à

□ $-\infty$. □ 0. □ $+\infty$.

VRAI – FAUX

Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse.

1. La fonction $x \mapsto x\ln x - x + 1$ est la primitive de la fonction ln sur $\mathbb{R}_+^*$, qui s'annule en 1.

2. La fonction ln est une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

3. Pour tout réel x, $\ln x = \int_2^x \frac{dt}{t} + \ln 2$.

4. $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x\ln x - x} = +\infty$.

1 Calculer

$\ln(e^2)$; $\ln\left(\frac{1}{e}\right)$; $\ln 25 - 2\ln 5$;

$\ln 100000 - \ln 100000 - \ln 1000 - \ln\ln 100 - \ln 10$.

2 Résoudre dans $\mathbb{R}$ chacune des équations ci-dessous.

1. $\ln x + \ln(x+1) = 0$.
2. $\ln(\ln x) = 0$.
3. $\ln\left(\frac{1}{x}\right) + \ln(x^3) = \ln 3$.
4. $(\ln x)^2 - 2\ln x - 3 = 0$.

3 Résoudre dans $\mathbb{R}$ chacune des inéquations ci-dessous.

1. $\ln(2x+3) < 5$. 2. $\ln(3x+1) \le 0$.
3. $\ln(5x) > 1 - \ln 5$. 4. $\ln\left(\frac{1+x}{x+2}\right) \ge 0$.
5. $(\ln x)^2 - 2\ln x < 0$.

4 Trouver, dans chacun des cas suivants, la limite de la fonction f en $+\infty$.

1. $f(x) = \frac{\ln(x^4)}{x}$. 2. $f(x) = \frac{x^2+1}{x\ln x}$.
3. $f(x) = \frac{2-\ln x}{1+\ln x}$. 4. $f(x) = \ln\left(\frac{1+x}{2+x}\right)$.
5. $f(x) = \frac{\ln(x+1)}{x+2}$. 6. $f(x) = 1 + x - \ln x$.
7. $f(x) = x - \ln^2 x$. 8. $f(x) = x - \ln(x+1) + \ln(x)$.

5 Déterminer les limites ci-dessous.

1. $\lim\limits_{x\to 3} \frac{\ln x - \ln 3}{x-3}$. 2. $\lim\limits_{x\to e} \frac{\ln x - 1}{x - e}$.
3. $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}} \frac{\ln x + \ln 2}{x - \frac{1}{2}}$. 4. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+3x)}{x}$.
5. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(\cos x)}{x}$. 6. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+\sin x)}{x}$.
7. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{x^2-3x+2}$.

6 Déterminer les limites ci-dessous.

1. $\lim\limits_{x\to 0^+} x^2\ln x$. 2. $\lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{x}\ln x$.
3. $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x^2} + \ln x$. 4. $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x^3}{\ln x}$.
5. $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\ln^3 x}{x}$. 6. $\lim\limits_{x\to 0^+} x^3\ln^2\left(\frac{1}{x}\right)$.

7 Le plan est muni d'un repère orthonormé.

Pour chacun des cas ci-dessous, déterminer l'ensemble de définition de f, l'ensemble dans lequel elle est dérivable, calculer $f'(x)$ et représenter f après avoir étudier les branches infinies de sa courbe représentative.

1. $f : x \mapsto \ln\left(\frac{1}{x}\right)$.
2. $f : x \mapsto \ln(x^2 - x + 1)$.
3. $f : x \mapsto x\ln x - x$.
4. $f : x \mapsto x^2\ln x$.
5. $f : x \mapsto \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$.
6. $f : x \mapsto \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$.

8 Déterminer dans chacun des cas suivants, une primitive de la fonction f sur I.

1. $f(x) = \frac{1+x+x^2+x^3}{x^4}$, $I = \mathbb{R}_+^*$.
2. $f(x) = \frac{2x-3}{x+1}$, $I =]-1, +\infty[$.
3. $f(x) = \frac{x+1}{x+2}$, $I =]-2, +\infty[$.
4. $f(x) = \frac{x}{x^2+1} - x(x^2+1)$, $I = \mathbb{R}$.
5. $f(x) = \frac{1}{x\ln x}$, $I =]1, +\infty[$.
6. $f(x) = \frac{\ln^3 x}{x}$, $I =]0, +\infty[$.
7. $f(x) = \tan x$, $I = \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.
8. $f(x) = \frac{1}{\tan x}$, $I = \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

9 Calculer les intégrales ci-dessous.

1. $\int_1^e \frac{\ln^2 x}{x}dx$.   2. $\int_1^2 \frac{2}{x+1}dx$.

3. $\int_0^1 \frac{x+1}{x^2+2x+3}dx$.   4. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \tan x\,dx$

5. $\int_1^2 \frac{\ln x}{x}dx$.   6. $\int_2^4 \frac{dx}{x\ln x}$.

10 A l'aide d'une intégration par parties, calculer les intégrales ci-dessous.

1. $\int_1^e x\ln x\,dx$.   2. $\int_e^{e^2} x^2\ln x\,dx$.

3. $\int_1^e \frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx$.   4. $\int_1^e \ln^2 x\,dx$.

11 On considère la fonction

$f: x \mapsto \frac{1}{x^2(x-2)}$.

1. On se propose de déterminer les réels a , b et c tels que $f(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{x-2}$, $x \neq 0$ et $x \neq 2$.

a. Calculer $\lim\limits_{x \to 2} f(x)(x-2)$. En déduire c.

b. Calculer $\lim\limits_{x \to 0} f(x)x^2$. En déduire b.

c. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)x$. En déduire a.

2. Calculer $\int_3^4 f(x)dx$.

3. A l'aide d'une intégration par parties, calculer $\int_3^4 \frac{\ln(x-2)dx}{x^3}$.

12 Etudier, dans chacun des cas ci-dessous, f et tracer sa courbe dans un repère orthogonal.

1. $f: x \mapsto (\ln x)^2$.
2. $f: x \mapsto \frac{1}{\ln x}$.
3. $f: x \mapsto \ln(\sqrt{x})$.
4. $f: x \mapsto \ln|x^2-1|$.

13 Soit la fonction f définie sur $]0, e[$ par

$f(x) = \frac{\ln x - 2}{\ln x - 1}$.

1. Etudier les variations de f et tracer sa courbe C dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

2. Montrer que f est une bijection de $]0, e[$ sur $]1, +\infty[$.

3. a. Tracer la courbe de f^{-1} dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

b. Calculer $f^{-1}(2)$ et en déduire $(f^{-1})'(2)$.

14 Soit la fonction $f: x \mapsto -\frac{x}{2} + \ln\left|\frac{x-1}{x}\right|$.

On note C la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Préciser l'ensemble de définition de f.
2. Dresser le tableau de variation de f.
3. Montrer que la droite Δ d'équation $y = \frac{-x}{2}$ est une asymptote à la courbe C.
Préciser la position relative de C par rapport à Δ.
4. Montrer que le point $I\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)$ est un centre de symétrie pour C.
5. Construire C.
6. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution réelle unique x_0 et que $\frac{2}{5} < x_0 < \frac{9}{20}$.

15 Soit la fonction $f: x \mapsto (\ln x)^2 - 3\ln x + 2$.

1. Dresser le tableau de variation de f, (on pourra remarquer que $\ln\left(\sqrt{e^3}\right) = \frac{3}{2}$).

2. Tracer dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, la courbe C de f et préciser les points d'intersection de C avec l'axe $(O, \vec{i})$.

3. Montrer que la fonction $F: x \mapsto x(\ln x)^2 - 5x\ln x + 7x$ est une primitive de f sur $]0, +\infty[$.

4. Calculer l'aire de la partie du plan limitée par C et les droites d'équations $x = e$, $x = e^2$ et $y = 0$.

16 Soit la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par

$f(x)=2-x+\dfrac{\ln x}{x}$.

1. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$.
2. Soit la fonction g définie sur $]0,+\infty[$ par

$g(x)=1-x^2-\ln x$.

a. Etudier le sens de variation de g.
b. Calculer $g(1)$. En déduire le signe de g.

3. Vérifier que pour tout x de $]0,+\infty[$, $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2}$.
4. On désigne par C la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

a. Montrer que la droite $\Delta : y=-x+2$ est une asymptote à C.
b. Etudier la position relative de C et Δ.
c. Tracer C et Δ.

17 A/ Soit g la fonction définie sur

$]0,+\infty[$ par $g(x)=x^2-2+2\ln x$.

1. Dresser le tableau de variation de g.
2. Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution x_0 appartenant à $[1,\ 2]$.

Donner une valeur approchée de x_0 à 10^{-1} près.

En déduire le signe de g sur $]0,+\infty[$.

3. Le plan est muni d'un repère orthogonal $(O,\vec{i},\vec{j})$.

a. Calculer l'aire de la partie du plan limitée par la courbe de g, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=2$ et $x=3$.
b. Calculer l'aire de la partie du plan limitée par la courbe de g, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=\dfrac{1}{3}$ et $x=0.5$.

B/ Soit f la fonction définie sur

$]0,+\infty[$ par $f(x)=x-2-\dfrac{2\ln x}{x}$.

On désigne par C sa courbe dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. Montrer que pour tout $x>0$, $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2}$.
2. Dresser le tableau de variations de f.
3. a. Montrer que C admet une asymptote D au voisinage de $+\infty$ dont on donnera une équation.

b. Etudier la position de C et D.
c. tracer C et D.

18 1. Soi g la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par

$g(x)=2x\sqrt{x}-3\ln x+6$.

a. Etudier les variations de g sur $]0,+\infty[$.
b. En déduire le signe de g sur $]0,+\infty[$.

2. Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par

$f(x)=\dfrac{3\ln x}{\sqrt{x}}+x-1$. On désigne par C sa courbe dans un repère orthogonal.

a. Déterminer les limites de f en 0 et $+\infty$.
b. Etudier les variations de f sur $]0,+\infty[$.

3. a. Montrer que C admet une asymptote D au voisinage de $+\infty$ dont on donnera une équation.

b. Etudier la position de C et D.
c. tracer C et D.

19 Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par

$f(x)=\dfrac{1-\ln x}{x}$. On note C_f sa courbe dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. Dresser le tableau de variation de f.
2. Tracer C_f
3. Calculer l'aire de la partie du plan limitée par C_f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=1$ et $x=e$.
4. Soit $C=\{M(x,y)$ tels que $y=f(x)$ et $1\le x\le e\}$ et S le solide obtenu par rotation de C autour de l'axe (Ox).

a. A l'aide d'une intégration par parties, calculer $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln x}{x^2}dx$ puis $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln^2 x}{x^2}dx$.
b. En déduire le volume de S.

20 On considère la fonction f définie sur $]0,+\infty[$

par $f(x)=\left(1-\dfrac{1}{x}\right)(\ln x-2)$.

1. Déterminer les limites de f à droite en 0 et en $+\infty$.
2. Montrer que f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et déterminer sa dérivée.

3. Soit u la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $u(x)=\ln x+x-3$.
a. Etudier les variations de u.
b. Montrer que l'équation $u(x)=0$ possède une unique solution α appartenant à l'intervalle $[2.2,\ 2.21]$.
c. Etudier le signe de u(x) sur]0 ; +∞ [.
4. a. Etudier les variations de f.
b. Montrer que $f(\alpha)=-\dfrac{(\alpha-1)^2}{\alpha}$. En déduire un encadrement de $f(\alpha)$ d'amplitude 2×10^{-2}.
5. Tracer la courbe de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

21 A/ Soit g la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $g(x)=1-x-2x\ln x$.
1. Etudier les variations de g sur $]0,+\infty[$, (on pourra remarquer que $\ln\left(\dfrac{1}{\sqrt{e^3}}\right)=-\dfrac{3}{2}$).
2. Calculer $g(1)$ puis en déduire le signe de $g(x)$ pour $x>0$.
B/ Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{1+\ln x}{(1+x)^2}$.
On désigne par C sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O,\vec{i},\vec{j})$.
1. a. Vérifier que pour tout $x>0$, $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x(1+x)^3}$.
b. Dresser le tableau de variation de f.
c. Etudier les branches infinies de C.
3. Déterminer une équation de la tangente à C au point d'intersection de C avec l'axe des abscisses.
4. Tracer C.
C/ Soit un réel $\lambda>1$.
1. Vérifier que pour tout $x>0$, $\dfrac{1}{x(1+x)}=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}$.
2. En déduire $\displaystyle\int_1^{\lambda}\frac{dx}{x(1+x)}$.
3. On pose $A(\lambda)$ l'aire de la partie du plan limitée par la courbe C, l'axe des abscisse et les droites d'équation $x=1$ et $x=\lambda$.
a. A l'aide d'une intégration par partie, déterminer $A(\lambda)$.
b. Calculer $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} A(\lambda)$.

22 I. On considère la fonction g définie sur $]0,+\infty[$ par $g(x)=x(x-1)+\ln x$.
1. Montrer que la fonction g est strictement croissante sur $]0,+\infty[$.
2. Calculer $g(1)$ et en déduire le signe de $g(x)$ pour $x>0$.
II. Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=(x-1)^2+\ln^2 x$.
On désigne par C_1 la courbe de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.
1.a. Calculer $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
b. Montrer que f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et que $f'(x)=2\dfrac{g(x)}{x}$ pour $x>0$.
c. Dresser le tableau de variation de f sur $]0,+\infty[$.
2. Montrer que la restriction h de f à $]0,1]$ est une bijection de $]0,1]$ sur $[0,+\infty[$.
On désigne par h^{-1} la réciproque de h et par C_2 la courbe représentative de h^{-1} dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.
3. Soit u la fonction définie sur]0, 1] par $u(x)=h(x)-x$.
a. Dresser la tableau de variation de u sur]0,1].
b. En déduire qu'il existe un seul réel a de]0, 1] tel que $h(a)=a$.
Vérifier que $0.5<a<1$.
2. a. Montrer que C_1 admet au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique de direction celle de $(O,\vec{j})$.
b. Tracer dans le même repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ la droite Δ d'équation $y=x$, la courbe C_1 et la courbe C_2.

III. On désigne par A l'aire de la partie du plan limitée par la courbe C_1, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = 1$.

Soit $I = \int_a^1 x f'(x)\,dx$.

1. Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que $I = -a^2 - A$.

2. a. Montrer que $I = 2\int_a^1 g(x)\,dx$.

b. En déduire que $I = -\frac{2}{3}a^3 + a^2 + 2a - \frac{7}{3} - 2a\ln a$.

c. Déterminer A en fonction de a.

23 On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0,+\infty[$ par

$$\begin{cases} f(0) = 0, \\ f(x) = \frac{1}{2}x^2(3 - 2\ln x) \text{ si } x > 0. \end{cases}$$

On note C la courbe de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

A/ 1. a. Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$. Que peut-on en déduire pour la fonction f ?

b. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

2. a. Étudier la dérivabilité de f en 0.

b. Montrer que f est dérivable sur l'intervalle $]0,+\infty[$ et déterminer f'.

3. Étudier le sens de variations de f sur $]0,+\infty[$ puis dresser son tableau de variations.

4. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ possède une solution unique α dans $]0,+\infty[$.

Déterminer une valeur approchée de α à 10^{-2} près.

B/ 1. Déterminer une équation de la tangente D à la courbe C au point d'abscisse 1.

2. On considère la fonction g définie sur $]0,+\infty[$ par

$g(x) = f(x) - 2x + \frac{1}{2}$.

a. Déterminer g' et g''.

Étudier le sens de variations de g'.

En déduire le signe de g' sur $]0,+\infty[$.

b. Étudier le sens de variations de g. En déduire la position de la courbe C par rapport à la tangente D.

3. Construire la courbe C et la tangente D.

C/ 1. Soit n un entier naturel non nul. Exprimer en fonction de n le réel $I_n = \int_{\frac{1}{n}}^1 x^2\ln x\,dx$.

2. En déduire en fonction de n, l'aire A_n de la partie du plan limitée par la courbe C, la tangente D et les deux droites d'équation $x = \frac{1}{n}$ et $x = 1$.

3. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n$.

24 Le plan est muni d'un repère orthonormé.

Tracer la fonction $x \mapsto \ln x$.

Pour tout entier un entier $n \geq 2$, on pose

$S_n = \ln 1 + \ln 2 + ... + \ln n$ et

$T_n = \ln 1 + \ln 2 + ... + \ln(n-1)$.

1. Montrer que $T_n \leq \int_1^n \ln x\,dx \leq S_n$.

2. En déduire que $\ln(n-1)! \leq n\ln n - n + 1 \leq \ln n!$.

Puis que $e\left(\frac{n}{e}\right)^n \leq n! \leq ne\left(\frac{n}{e}\right)^n$.

25 Soit f la fonction définie par $f(x) = \ln(\ln x)$.

1. Préciser l'ensemble de définition de f.

2. Etudier la dérivabilité de f et calculer $f'(x)$.

3. On pose $S_n = \sum\limits_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln k}$ avec $n \geq 2$.

Montrer que pour tout entier $k \geq 2$

$\int_k^{k+1} \frac{1}{t\ln t}dt \leq \frac{1}{k\ln k}$.

4. Calculer $\int_2^{n+1} \frac{1}{t\ln t}dt$ et en déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

26 1. Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}_+$,

$x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$.

2. a. Montrer que $\sum\limits_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ et

$\sum\limits_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

3. On pose $P_n = \left(1+\frac{1}{n^2}\right)\times\left(1+\frac{2}{n^2}\right)\times\ldots\times\left(1+\frac{n}{n^2}\right)$.

a. Montrer que

$$\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k-\frac{1}{2n^4}\sum_{k=1}^{n}k^2 \le \ln P_n \le \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k$$

b. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n$.

27 I. Soit g la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par

$g(x)=\ln(x+2)-\ln x-\frac{2}{x+2}+\frac{1}{4}$.

1. a. Étudier le sens de variation de g.

b. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

c. En déduire le signe de $g(x)$ pour tout x de $[0,+\infty[$.

2. Montrer que, pour tout x de $[2, 3]$, $g(x)<\frac{1}{2}$.

II. Soit f la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par

$f(x)=x\ln\left(\frac{x+2}{x}\right)+\frac{x}{4}+\frac{1}{2}$ pour $x>0$ et

$f(0)=\frac{1}{2}$.

On désigne par C la courbe de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. Déterminer $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln\left(\frac{x+2}{x}\right)$ et montrer que f est continue en 0 à droite.

2. La fonction f est-elle dérivable en 0 à droite ? Donner une interprétation graphique du résultat.

3. Étudier le sens de variation de f.

4. a. Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln\left(\frac{x+2}{x}\right)=2$.

b. En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

c. Montrer que la droite Δ d'équation $y=\frac{x}{4}+\frac{5}{2}$ est asymptote à C au voisinage de $+\infty$.

5. Tracer dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ la droite Δ, la courbe C et la droite D d'équation $y=x$.

III. 1. Soit la fonction h définie sur $[2, 3]$ par $h(x)=f(x)-x$. Montrer que, pour tout x de $[2, 3]$, $h'(x)<0$.

2. En déduire le sens de variation de h et montrer que l'équation $h(x)=0$ admet une unique solution α dans $[2, 3]$.

3. Montrer que, pour tout x de $[2, 3]$, $0<f'(x)<\frac{1}{2}$.

4. En déduire que, pour tout x de $[2, 3]$,

$|f(x)-\alpha|<\frac{1}{2}|x-\alpha|$.

On définit la suite (u_n) par $u_0=2$ et pour tout $n\ge 0$, $u_{n+1}=f(u_n)$.

a. Montrer que pour tout n, u_n appartient à $[2, 3]$.

b. Montrer que pour tout n, $|u_{n+1}-\alpha|\le\frac{1}{2}|u_n-\alpha|$.

c. En déduire que pour tout n, $|u_n-\alpha|\le\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

d. Montrer que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite sa limite.

28 I. Soit f l'application définie sur $]0,+\infty[$ par

$f(x)=4-x-\frac{\ln x}{4}$.

On désigne par C la courbe de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. Calculer les limites de f aux bornes de $]0,+\infty[$.

Etudier les branches infinies de C.

2. a. Dresser son tableau de variations.

b. En déduire que l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique a appartenant à $[3, 4]$

c. Tracer C.

3. Soit A l'aire de la partie du plan limitée par C, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=a$ et $x = 4$.

Exprimer A en fonction de a.

II. 1. Soit g l'application définie sur $]0,+\infty[$ par

$g(x)=4-\frac{1}{4}\ln x$.

a. Montrer que a est solution de l'équation $g(x)=x$.

b. Montrer que $g([3,4])\subset[3,4]$.

c. Montrer que, pour tout réel x de $[3,4]$,

$|g'(x)| \leq \frac{1}{12}$.

2. Soit (u_n) la suite définie par

$u_0 = 3$ et $u_{n+1} = g(u_n)$, $n \geq 0$.

a. Montrer que pour tout n, u_n appartient à $[3,4]$.

b. Montrer que pour tout n,

$|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{12}|u_n - \alpha|$.

c. En déduire que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite sa limite.

29 A/ 1. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $g(x) = (1-x)\ln x$.

Déterminer le signe de $g(x)$.

2. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $h(x) = \ln x - x$.

a. Dresser le tableau de variation de h.

b. En déduire le signe de h.

B/ Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

par $f(x) = \ln x(\ln x - x)$.

On désigne par C_f la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et que $f'(x) = \frac{g(x)+h(x)}{x}$.

2. Dresser le tableau de variation de f.

3. Déterminer la nature des branches infinies de C_f.

4. a. Déterminer le point d'intersection de C_f avec l'axe des abscisses.

b. Déterminer une équation de la tangente T à C_f au point d'abscisse 1.

c. Vérifier que le point $A(e, -e+1)$ est un point d'intersection de C_f avec T.

5. Construire C_f et T.

6. Soit $\alpha \in]0,1[$ et D la partie du plan limitée par C_f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = \alpha$ et $x = 1$.

a. Calculer à l'aide, d'une intégration par parties, $\int_\alpha^1 \ln^2 x\,dx$ et $\int_\alpha^1 x\ln x\,dx$.

b. En déduire, à l'aide de α, l'aire $\mathcal{A}(\alpha)$ de D.

c. Déterminer $\lim\limits_{\alpha \to 0^+} \mathcal{A}(\alpha)$.

7. a. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur un intervalle J à préciser.

b. Tracer dans le même repère la courbe de f^{-1}.

30 A/ Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[\setminus\{1\}$ par $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{\ln x}$.

On désigne par C_f la courbe de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Déterminer $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$, $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$, $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

Interpréter les résultats graphiquement.

2. a. Montrer que f est dérivable sur $]0,+\infty[\setminus\{1\}$ et que $f'(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x(\ln x)^2}$.

b. Dresser le tableau de variation de f.

3. Soit h la restriction de f à $]0,1[$.

a. Montrer que h réalise une bijection de $]0,1[$ sur un intervalle J que l'on précisera.

b. Montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet dans $]0,1[$ une unique solution α et que $0.5 < \alpha < 0.6$.

c. En déduire que C_f coupe l'axe des abscisses en un seul point que l'on précisera.

4. Tracer C_f.

5. Tracer dans le même repère la courbe représentative de la fonction h^{-1}.

6. a. Montrer que $h'(\alpha) = -\frac{\alpha+1}{\alpha^3}$.

b. Montrer que h^{-1} est dérivable en 0 et exprimer $(h^{-1})'(0)$ en fonction de α.

B/ Soit g la fonction définie sur $]1,+\infty[$ par $g(x)=2f\left(x^2\right)$.

On désigne par C_g la courbe de g dans le repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

1. Vérifier que pour tout $x\in]1,+\infty[$, $f(x)-g(x)=\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}$.

2. En déduire la position relative de C_f et C_g sur $]1,+\infty[$.

3. Soit $x\in[2,+\infty[$, on désigne par M et N les points respectifs de C_f et C_g d'abscisse x.

Pour quelle valeur de x, la distance NM est-elle maximale ?

31 I/ 1. Soit h la fonction définie sur l'intervalle $]0,+\infty[$ par $h(x)=x-\ln x$.

a. Dresser le tableau de variation de f.

b. En déduire que pour tout réel x de $]0,+\infty[$, $h(x)\geq 1$.

2. Soit f la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x-\ln x} & \text{si } x>0,\\ 0 & \text{si } x=0.\end{cases}$$

a. Montrer que f est continue sur $[0,+\infty[$.

b. La fonction f est-elle dérivable à droite en 0 ?

II/ Soit F la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par

$$F(x)=\int_x^{2x}f(t)\,dt.$$

1. a. montrer que F est dérivable sur $[0,+\infty[$.

b. Montrer que pour tout x de $[0,+\infty[$,

$$F'(x)=\frac{\ln 2-\ln x}{h(2x).h(x)} \text{ et } F'_d(0)=0.$$

2. Montrer que pour tout x de $]0,+\infty[$,

$$\int_x^{2x}\frac{dt}{t}=\ln 2.$$

3. Montrer que pour tout x de $[1,+\infty[$,

$$0\leq F(x)-\ln 2\leq\frac{\ln(2x)}{x-\ln x}.$$

En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)$.

4. a. Montrer que $F\left(\frac{1}{2}\right)\leq\ln 2$.

b. Montrer alors qu'il existe un réel α de $[\frac{1}{2}, 1]$ tel que $F(\alpha)=\ln 2$.

5. a. Dresser le tableau de variation de F.

b. Donner l'allure de la courbe représentative de F dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

$\left(\text{On donne } F(1)\simeq 0.9 \text{ et } F(2)\simeq 1.1\right)$.

III/ Dans toute cette partie, n désigne un entier naturel non nul.

1. Soit la suite (v_n) définie par

$$v_n=\int_{\frac{1}{n}}^{1}\frac{t}{t-\ln t}dt,\ n\geq 1.$$

a. Montrer que pour tout t de $]0,+\infty[$, $\frac{t}{t-\ln t}\leq t$.

b. Montrer que la suite (v_n) est croissante.

c. En déduire que la suite (v_n) est convergente et que $0\leq\lim\limits_{n\to+\infty}v_n\leq\frac{1}{2}$.

2. Soit la suite (w_n) définie par

$$w_n=\int_1^n\frac{t}{t-\ln t}dt\ n\ n\geq 1.$$

a. Montrer que pour tout t de $[1,+\infty[$, $1\leq\frac{t}{t-\ln t}$.

b. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty}w_n$.

Chapitre 9

Fonction exponentielle

Des questions telles que "Si le nombre d'habitants d'une province s'accroît tous les ans d'une trentieme, & qu'il y ait au commencement 100.000 habitants; on veut savoir combien il y en aura au bout de 100 ans ?" (Euler 1748, Introductio §110) ou "Un particulier doit 400.000 florins, dont il est convenu de payer tous les ans l'intérêt à 5 pour cent…"
En appliquant la formule du binôme, Euler dit sans la moindre hésitation, "Si N est un nombre plus grand qu'aucune quantité assignable la fraction $\left(\frac{N-1}{N}\right)$ égalera l'unité". […] si N tend vers l'infini, $\left(1+\frac{1}{N}\right)^N$ tend vers le nombre d'Euler e.

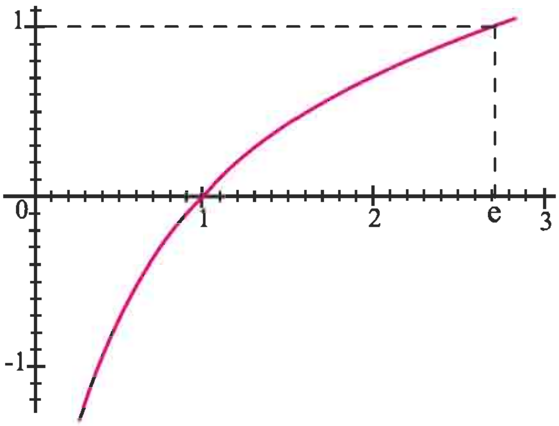
(E.Haier et al, L'analyse au fil de l'histoire, 2000)

Chapitre 9

Fonction exponentielle

I. Définition et propriétés

Activité 1



1. Dans la figure ci-contre on a représenté la fonction logarithme népérien.
Donner graphiquement une valeur approchée de l'antécédent de chacun des réels $\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}$
2. Montrer que la fonction $\ln : x \mapsto \ln x$ admet une fonction réciproque que l'on désignera par exp. Tracer la courbe représentative de la fonction exp.
3. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction exp et ses limites aux bornes de l'ensemble de définition.
4. Que valent $\exp(0)$, $\exp(1)$, $\exp(2)$ et $\exp(-1)$?

Définition

On appelle fonction exponentielle la fonction réciproque de la fonction logarithme népérien.
L'image d'un réel x par la fonction exponentielle est noté e^x.

Conséquences

- Pour tout réel x et pour tout réel strictement positif y, $y = e^x \Leftrightarrow x = \ln y$.
- Pour tout réel x, $\ln\left(e^x\right) = x$. • Pour tout réel $x > 0$, $e^{\ln x} = x$.
- $\ln e = 1$.

Activité 2

Utiliser une calculatrice pour donner une valeur approchée de $e^{\frac{1}{2}}$, $e^{\frac{2}{3}}$, $e^{\sqrt{3}}$ et $e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}}$.

Activité 3

Simplifier $e^{\ln 1}$, $e^{\ln 2}$, $e^{-\ln 3}$, $\ln\left(e^{-2}\right)$, $\ln\left(e^{-2\ln 3}\right)$.

Propriétés

Soit deux réels a et b.

P_1. $e^{a+b} = e^a \times e^b$, $\quad e^{-a} = \dfrac{1}{e^a}$, $\quad e^{a-b} = \dfrac{e^a}{e^b}$.

P_2. Pour tout entier n , $e^{na} = \left(e^a\right)^n$.

P_3. Pour tout entier naturel $q \geq 2$, $e^{\frac{a}{q}} = \sqrt[q]{e^a}$.

P_4. Pour tout entier naturel $q \geq 2$ et tout entier p, $e^{\frac{p}{q}a} = \sqrt[q]{e^{pa}}$.

Démonstration

P_1. • On sait que $e^{a+b} = e^a \times e^b$, si et seulement si, $\ln\left(e^{a+b}\right) = \ln\left(e^a \times e^b\right)$.

D'autre part, $\ln\left(e^{a+b}\right) = a + b$ et $\ln\left(e^a \times e^b\right) = \ln\left(e^a\right) + \ln\left(e^a\right) = a + b$.

La propriété en découle.

• D'après la première égalité, $e^{a-a} = e^0 = 1 = e^a \times e^{-a}$. Le résultat en découle.

• De plus, $e^{a-b} = e^a \times e^{-b}$. Par suite $e^{a-b} = \dfrac{e^a}{e^b}$

La propriété P_2 découle de l'équivalence $e^{na} = \left(e^a\right)^n$, si et seulement si,

$\ln\left(e^{na}\right) = \ln\left(\left(e^a\right)^n\right)$

et des propriétés algébriques de la fonction ln.

P_3. Soit un entier $q \geq 2$ et a un réel .

En écrivant $a = q \times \dfrac{a}{q}$, on obtient $e^a = e^{q \times \frac{a}{q}}$.

De la propriété P_2 on en déduit que $e^a = \left(e^{\frac{a}{q}}\right)^q$. Par suite, $e^{\frac{a}{q}} = \sqrt[q]{e^a}$.

P_4. Soit un entier $q \geq 2$ et p un entier naturel. On peut écrire $e^{\frac{p}{q}a} = e^{\frac{1}{q}(pa)} = \sqrt[q]{e^{pa}}$.

Activité 4

Simplifier les écritures suivantes $\sqrt[6]{e^2} \times e^{\frac{3}{2}}$; $\dfrac{\sqrt{e^3}}{\sqrt{e^{-4}}}\sqrt[4]{e^2}$ et $\dfrac{\sqrt{e^{30}}}{\sqrt{e^{-42}}}\sqrt[10]{e^{-20}}$.

Activité 5

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

1. $e^x = 3$
2. $\ln x = 3$
3. $e^{2x+3} = 4$
4. $e^{2x+3} = e$
5. $(e^x - 1)(e^x - 2) = 0$
6. $e^{2x} + e^x - 3 = 0$

II. Etude de la fonction exponentielle

Activité 1

On désigne par C la courbe de la fonction exponentielle dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

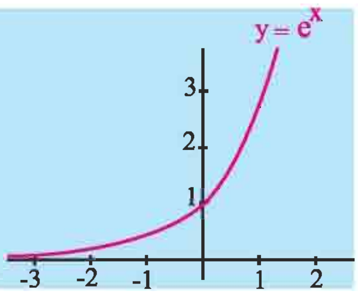
1. Déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x$.
2. On pose $X = e^x$.
   a. Montrer que $\dfrac{e^x}{x} = \dfrac{X}{\ln X}$.
   b. En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x}$ puis interpréter le résultat graphiquement.
3. a. Justifier la dérivabilité de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$ et déterminer sa fonction dérivée.
   b. Calculer alors $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x}$.
   c. Dresser le tableau de variation de la fonction exponentielle.
4. Etudier l'intersection de la courbe C avec les axes du repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
5. a. Déterminer l'équation de la tangente T à C au point d'abscisse 0.
   b. Soit la fonction h définie pour tout réel x par $h(x) = e^x - x - 1$.
   Etudier les variations de h et en déduire la position relative de C par rapport à T.
6. Tracer C et T.

Théorème

- $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$, $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$.
- La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa fonction dérivée est la fonction $x \mapsto e^x$.

La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

- La fonction exponentielle est bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.



Activité 2

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.

1. $e^{3x} \leq e^{x^2}$.   2. $e^{3x} \leq 4e^x$.   3. $e^{x(x-1)} > 1$.

III. Limites usuelles

Activité 1

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^x$.

On désigne par C_f la courbe de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Déterminer la nature de la branche infinie de C_f au voisinage de $+\infty$.
2. a. Déterminer $\lim\limits_{t \to +\infty} \frac{t}{e^t}$.

   b. En déduire $\lim\limits_{x \to -\infty} x e^x$ puis interpréter le résultat graphiquement.
3. Dresser le tableau de variation de f.
4. Montrer que C_f admet un point d'inflexion I que l'on précisera.
5. Tracer C_f en précisant la tangente T en I.

Activité 2

1. Déterminer $\lim\limits_{X \to +\infty} \frac{\ln^m X}{X^n}$ et $\lim\limits_{X \to 0^+} X^n \ln^m X$, où n et m sont des éléments de $\mathbb{N}^*$.
2. a. En déduire que pour tous entiers naturels non nuls n et m, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^{nx}}{x^m} = +\infty$.

   b. Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} \left| x^m e^{nx} \right|$.

Théorème

Soit m et n deux entiers naturels non nuls, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^{nx}}{x^m} = +\infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} x^m e^{nx} = 0$.

Activité 3

Calculer les limites ci-dessous.

$$\lim_{x \to +\infty} \left(x^2 - e^{2x}\right) \ ; \ \lim_{x \to +\infty} x\left(e^{2x} - e^x\right) \ ; \ \lim_{x \to -\infty} x\left(e^{2x} - e^x\right); \ \lim_{x \to -\infty} \frac{x+1}{e^x + 1} \ ; \ \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^3 + 1}.$$

IV. La fonction $x \mapsto e^{u(x)}$

Activité 1

Etudier et représenter la fonction $x \mapsto e^{2x}$.

Théorème

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I.
La fonction $h : x \mapsto e^{u(x)}$ est dérivable sur I et $h'(x) = u'(x)e^{u(x)}$, $x \in I$.

Démonstration

On peut écrire pour tout réel x de I, $h(x) = f(u(x))$ avec $f : x \mapsto e^{x}$. Par suite, $h = f \circ u$.
Le théorème en résulte.

Corollaire

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I.
Les primitives sur I de la fonction $x \mapsto u'(x)e^{u(x)}$ sont les fonctions
$x \mapsto e^{u(x)} + k$, $k \in \mathbb{R}$.

Activité 2

Calculer les dérivées des fonctions ci-dessous.

$x \mapsto \sqrt{x}e^{\sqrt{x}}$, $x \mapsto (2x+1)e^{-3x}$, $x \mapsto \dfrac{e^{2x}+1}{2e^{2x}+3}$ et $x \mapsto x^3e^{3x}$.

Activité 3

Déterminer les primitives sur $\mathbb{R}$ des fonctions ci-dessous.

$x \mapsto e^{-3x}$; $x \mapsto xe^{x^2}$; $x \mapsto (2x+1)e^{x^2+x}$ et $x \mapsto \sin x\, e^{\cos x}$.

Activité 4

Calculer les intégrales ci-dessous.

$\displaystyle\int_0^1 e^x dx$, $\displaystyle\int_0^1 e^{-x+1} dx$, $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{(e^x+1)^2} dx$ et $\displaystyle\int_0^1 xe^{x^2} dx$. .

Exercice résolu

Calculer à l'aide d'une intégration par parties $I = \displaystyle\int_0^1 xe^x dx$ et $J = \displaystyle\int_0^1 x^2e^x dx$.

Solution

- En posant $u(x)=x$, $u'(x)=1$,
  $v'(x)=e^x$, $v(x)=e^x$,

on obtient

$$I=\int_0^1 xe^x dx=\left[xe^x\right]_0^1-\int_0^1 e^x dx=1.$$

- En posant $u(x)=x^2$, $u'(x)=2x$,
  $v'(x)=e^x$, $v(x)=e^x$,

on obtient

$$J=\int_0^1 x^2e^x dx=\left[x^2e^x\right]_0^1-2\int_0^1 xe^x dx=e-2I=e-2.$$

Activité 5

Pour tout entier naturel non nul n, on pose $I_n=\int_0^1 x^n e^{-x}dx$.

1. a. Montrer que tout entier naturel n, $0\le I_n\le\dfrac{1}{n+1}$.

   b. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

Exercice résolu

Le plan est muni d'une repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

Soit la fonction $f:x\mapsto e^{-x^2}$ et C sa courbe représentative.

1. Etudier et représenter f.

2. On considère la fonction F définie pour tout réel $X\ge 0$, par $F(X)=\int_0^X f(x)dx$.

   Donner une interprétation géométrique de $F(X)$.

3. a. Montrer que pour tout $x\ge 1$, $e^{-x^2}\le e^{-x}$.

   b. Montrer que pour tout $X\ge 1$, $\int_0^1 e^{-x^2}dx\le F(X)\le\int_0^1 e^{-x^2}dx+\int_1^X e^{-x}dx$.

   c. En déduire que tout $X\ge 1$, $e^{-1}\le F(X)\le 1+e^{-1}$.

4. Montrer que la fonction F est croissante sur $[1,+\infty[$ et en déduire qu'elle possède une limite finie L quand X tend vers $+\infty$.
   Donner un encadrement de L.

Solution

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = -2xe^{-x^2}$.
On en déduit que $f'(x) \geq 0$, si et seulement si, $x \leq 0$.

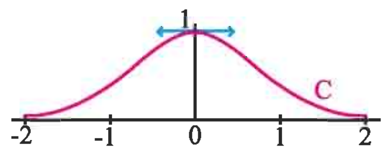
De plus, l'égalité $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$ implique que $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x^2} = 0$.

La fonction f étant paire, on en déduit que $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{-x^2} = 0$. Ce qui prouve que la courbe C de f admet la droite d'équation $y = 0$ comme asymptote au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$.

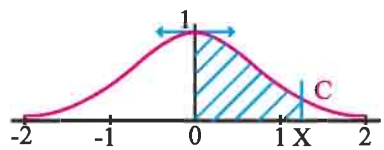
Tableau de variation de f

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

Représentation graphique de f



2. Le réel F(X) représente l'aire de la partie du plan limitée par la courbe C, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = X$.



3. a. Pour tout $x \geq 1$, $x^2 \geq x$. On en déduit que $-x^2 \leq -x$, puis que $e^{-x^2} \leq e^{-x}$ car la fonction exponentielle est croissante.

b. Pour tout $X \geq 1$, $F(X) = \int_0^1 e^{-x^2}dx + \int_1^X e^{-x^2}dx$.

De plus, $0 < e^{-x^2} \leq e^{-x}, x \geq 1$. Ce qui implique que $0 \leq \int_1^X e^{-x^2}dx \leq \int_1^X e^{-x}dx, X \geq 1$.

Il en résulte que $\int_0^1 e^{-x^2}dx \leq F(X) \leq \int_0^1 e^{-x^2}dx + \int_1^X e^{-x}dx$, pour tout $X \geq 1$.

c. Soit $X \geq 1$.
La fonction f étant décroissante sur $[0, +\infty[$, on peut écrire

$\int_0^1 e^{-1}dx \leq \int_0^1 e^{-x^2}dx \leq \int_0^1 1dx$, ou encore, $e^{-1} \leq \int_0^1 e^{-x^2}dx \leq 1$ (*).

Par ailleurs, $\int_1^X e^{-x}dx = e^{-1} - e^{-X}$, ce qui prouve que $\int_1^X e^{-x}dx \leq e^{-1}$ (**).

On déduit de (*) et (**) que $e^{-1} \leq \int_0^1 e^{-x^2}dx \leq F(X) \leq \int_0^1 e^{-x^2}dx + \int_1^X e^{-x}dx \leq 1 + e^{-1}$.

4. La fonction F est croissante sur $[1,+\infty[$ car sa dérivée est positive sur $[1,+\infty[$.
D'après la troisième question, la fonction F est majorée sur $[1,+\infty[$.
On en déduit qu'elle possède une limite finie L quand X tend vers $+\infty$.
La double inégalité $e^{-1} \leq F(X) \leq 1+e^{-1}$ implique que $e^{-1} \leq L \leq 1+e^{-1}$.

V. Exponentielle de base a

Activité 1

1. Calculer les réels $e^{3\ln 2}$, $e^{4\ln\left(\frac{1}{2}\right)}$, $e^{-\ln\left(\frac{1}{2}\right)}$, $e^{-2\ln\sqrt{2}}$.
2. Vérifier que pour tout réel a strictement positif et pour tout entier n, $a^n = e^{n\ln a}$.

Soit un réel $a > 0$. Pour tout réel b, on pose $a^b = e^{b\ln a}$.

Activité 2

Soit p et q deux entiers tels que $q \geq 2$ et a un réel strictement positif.

Montrer que $a^{\frac{1}{q}} = \sqrt[q]{a}$; $a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$.

Activité 3

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations ci-dessous.

$2^x = \frac{1}{2}$, $10^{x+1} = 2^{-x+2}$ et $2^x = 2^{-x+1}$.

Les règles opératoires ci-dessous découlent des propriétés de la fonction logarithme népérien et de la fonction exponentielle.

Propriétés

Pour tous nombres réels strictement positifs a et b et tous réels c et d,

$a^{c+d} = a^c \times a^d$; $\left(a^c\right)^d = a^{cd}$; $a^{-d} = \frac{1}{a^d}$; $a^{c-d} = \frac{a^c}{a^d}$; $a^c \times b^c = (ab)^c$; $\frac{a^c}{b^c} = \left(\frac{a}{b}\right)^c$.

Activité 4

Le plan est muni d'un repère orthonormé.
Soit les fonctions $f : x \mapsto e^{x\ln 2}$ et $g : x \mapsto e^{-x\ln 2}$. On note C_f et C_g leurs courbes représentatives.

1. Etudier et représenter la fonction f.
2. Soit un réel a et $A(a, f(a))$ un point de C_f.
   Montrer que le symétrique de A par rapport à l'axe des ordonnées est un point de C_g.
3. Montrer que C_f et C_g sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.

Définition

Soit un réel $a > 0$. On appelle fonction exponentielle de base a la fonction $x \mapsto a^x$.

Conséquences

Les résultats ci-dessous découlent de la définition précédente et des propriétés de la fonction logarithme népérien et de la fonction exponentielle.

Soit un réel $a > 0$. La fonction $x \mapsto a^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa fonction dérivée est la fonction $x \mapsto (\ln a)a^x$.

La fonction $x \mapsto a^x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ si $a > 1$.
La fonction $x \mapsto a^x$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ si $0 < a < 1$.
La fonction $x \mapsto 1^x$ est une fonction constante.

Si $a > 1$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = +\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = 0$.

Si $0 < a < 1$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = 0$; $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = +\infty$.

Tableau de variation de la fonction $f : x \mapsto a^x$.

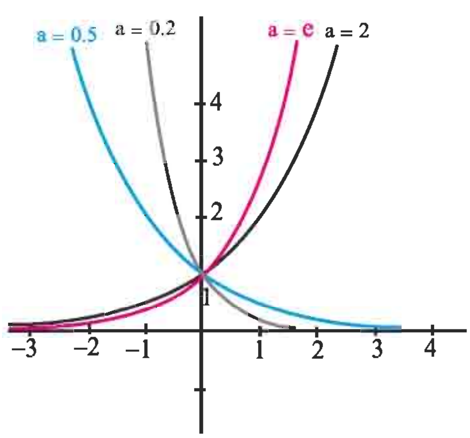
$a > 1$

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
f	0	$\nearrow$	$+\infty$

$0 < a < 1$

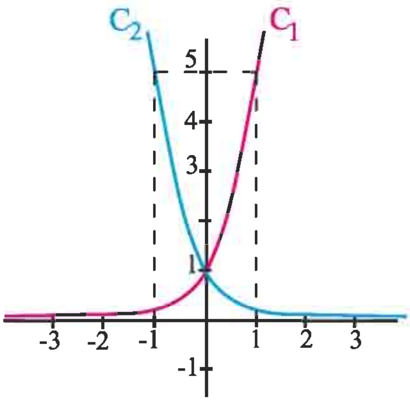
x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	
f	$+\infty$	$\searrow$	0

Courbes représentatives



Activité 5

Le plan est muni d'un repère orthonormé.
Le graphique ci-contre représente C_1 et C_2 deux courbes représentatives respectives des fonctions $f_{b_1} : x \mapsto (b_1)^x$ et $f_{b_2} : x \mapsto (b_2)^x$.
Déterminer les réels strictement positifs b_1 et b_2.



Activité 6

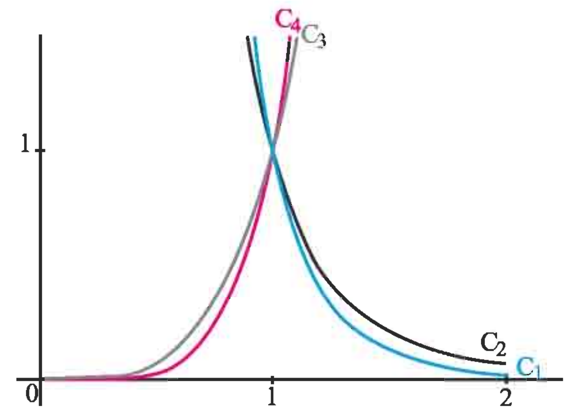
Déterminer les limites ci-dessous.

$$\lim_{x\to+\infty} 2^{x^2-2x} \; ; \; \lim_{x\to-\infty} 2^{x^2-2x} \; ; \; \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{3-2x}.$$

VI. Fonctions puissances

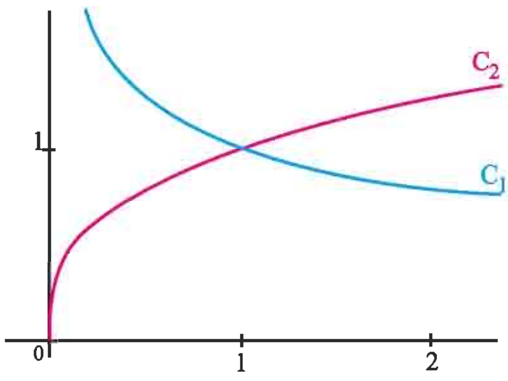
Activité 1

Le plan est muni d'un repère orthonormé.
On a représenté les fonctions
$x \mapsto x^4$; $x \mapsto x^5$; $x \mapsto x^{-4}$; $x \mapsto x^{-5}$, $x > 0$.
Identifier chacune des fonctions.



Activité 2

On a représenté les fonctions
$x \mapsto \sqrt[3]{x}$; $x \mapsto \sqrt[3]{\frac{1}{x}}$.
Identifier chacune des fonctions.



Activité 3

Le plan est muni d'un repère orthonormé.

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x)=\sqrt{x^3}$.

1. Montrer que pour tout réel $x>0$, $f(x)=e^{\frac{3}{2}\ln x}$
2. Etudier et représenter f.
3. Montrer que f est une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
4. Déterminer f^{-1}.

Activité 4

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x)=\sqrt[n]{x}$, $n\geq 2$

Montrer que pour tout réel $x>0$, $f(x)=x^{\frac{1}{n}}$.

Notation

Pour tout rationnel r et tout $x>0$, on note $e^{r.\ln x}=x^r$.

Définition

Soit r un rationnel. On appelle fonction puissance r la fonction $x\mapsto e^{r.\ln x}, x>0$.

Les résultats ci-dessous découlent des propriétés des limites des fonctions ln et exp.

Si $r>0$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} x^r=+\infty$; $\lim\limits_{x\to 0^+} x^r=0$.

Si $r<0$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} x^r=0$; $\lim\limits_{x\to 0^+} x^r=+\infty$.

Activité 5

Calculer les limites ci-dessous.

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{2}{3}}$; $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\frac{2}{3}}$; $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{-\frac{4}{3}}$; $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{-\frac{4}{3}}$.

Théorème

Soit r un rationnel. La fonction $x\mapsto x^r$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et sa dérivée est la fonction $x\mapsto r\,x^{r-1}$.

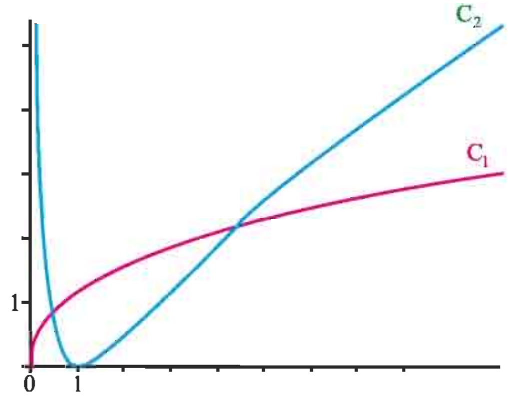
Corollaire

Soit r un rationnel différent de -1. Les primitives sur $\mathbb{R}_+^*$ de la fonction $x \mapsto x^r$ sont les fonctions $x \mapsto \dfrac{1}{r+1}x^{r+1} + k,\ k \in \mathbb{R}$.

VIII. Croissances comparées

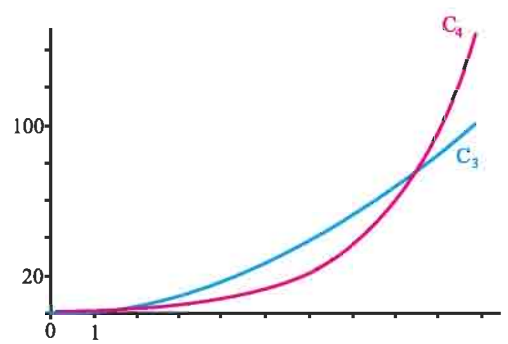
Activité 1

On a représenté les fonctions $f : x \mapsto (\ln x)^2$, $g : x \mapsto \sqrt{x}$. Identifier chacune des courbes.



Identifier chacune des courbes.

On a représenté les fonctions $h : x \mapsto x^2$, $t : x \mapsto \sqrt{e^x}$.



Identifier chacune des courbes.

Limites usuelles

Théorème

Soit r un rationnel strictement positif.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^r} = 0 \ ; \ \lim_{x\to 0^+} x^r \ln x = 0 \ ; \ \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^r} = +\infty \ .$$

Démonstration

On peut écrire $\frac{\ln x}{x^r} = \frac{1}{r}\frac{\ln x^r}{x^r}$. Il découle alors de $\lim\limits_{x\to+\infty} x^r = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ que $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^r} = 0$.

On démontre de même que $\lim\limits_{x\to 0^+} x^r \ln x = 0$.

On peut écrire pour tout $x > 0$, $\frac{e^x}{x^r} = e^{x - r\ln x}$.

De plus $x - r\ln x = x\left(1 - r\frac{\ln x}{x}\right)$.

Il en résulte que $\lim\limits_{x\to+\infty} (x - r\ln x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x\left(1 - r\frac{\ln x}{x}\right) = +\infty$.

Par suite $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^r} = +\infty$.

Activité 2

1. Montrer que $(1+x)^{-\frac{3}{4}} \leq x^{-\frac{3}{4}}$, pour tout $x > 0$.

2. Comparer $(1+x)^{\frac{1}{4}}$ et $1 + x^{\frac{1}{4}}$ pour tout $x > 0$

QCM

Cocher la réponse exacte.

1. Le réel $e^{-3\ln\left(\frac{1}{2}\right)}$ est égal à

☐ $-\frac{1}{8}$. ☐ 8. ☐ -6.

2. Le réel $2e^{x+y}$ est égal à

☐ e^{2x+2y}. ☐ $e^{2x}e^{2y}$. ☐ $2e^{x}e^{y}$.

3. l'équation $e^{x} = \frac{1}{e}$ est équivalente à

☐ $x = -1$. ☐ $x = \ln e$. ☐ $x = e$.

4. L'inéquation $-2 < e^{x^2-1} < 1$ est équivalente à

☐ $e^{x^2-1} > 0$. ☐ $x^2 > 1$. ☐ $-1 < x < 1$.

5. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{2e^{x}}{x^4} - \frac{1}{x^2}$.

☐ $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$. ☐ $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 2$. ☐ $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

6. Sur $\mathbb{R}_+^*$ la dérivée de $f : x \mapsto \frac{e^{x}}{x}$ est

☐ $f'(x) = e^{x}$. ☐ $f'(x) = \frac{x-1}{x^2 e^{-x}}$. ☐ $f'(x) = \frac{e^{x}(x+1)}{x^2}$.

7. L'intégrale $\int_0^1 xe^{x^2}dx$ est égale à

☐ $e-1$. ☐ $\frac{1}{2}e$. ☐ $\frac{1}{2}(e-1)$.

VRAI – FAUX

Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse.

1. La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et égale à sa dérivée.
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln x < x < e^{x}$.
3. Soit r un rationnel différent de -1.
   La fonction $x \mapsto x^{r+1}$ est une primitive de $x \mapsto x^{r}$ sur $]0, +\infty[$.
4. La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{e^{x}-1}{e^{x}+1}$ est paire.
5. L'équation $\frac{e^{x}+e^{-x}}{2} = 1$ est équivalente à $e^{x} = 1$.

1 Ecrire sous la forme d'une puissance de e les expressions ci-dessous

$\dfrac{e^7}{e^2}$; $\dfrac{\left(e^{-1}\right)^4}{e}$; $\left(e^2\right)^{-3}$; e^2e^{-3} .

2 1. Simplifier les écritures ci-dessous.

$e^{5\ln(3)}$; $e^{-3\ln(2)}$; $\ln\left(e^{-\frac{2}{3}}\right)$; $e^{(\ln 3-\ln 2)}$

$e^{5\ln 2}-e^{3\ln 4}$; $\dfrac{e^{2\ln 3}}{e^{\ln 81}}$; $\dfrac{e^3}{e^{4+\ln 3}}$.

3 1. Soit x un réel. Ecrire plus simplement les réels ci-dessous.

$e^x.e^{-2x}$; $e.e^x$; $\left(e^{-x}\right)^2$; $\dfrac{e^x}{e^{-x}}$; $\dfrac{e^{2x}}{e^{1-x}}$; $\dfrac{\left(e^x\right)^4}{e^{2x}}$.

2. Vérifier que pour tout réel x,

a. $e^{2x}+e^{-2x}+2=\left(e^x+e^{-x}\right)^2$.

b. $\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=\dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$.

4 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

$e^{(2x-3)}=1$; $e^x=2$; $e^{-2x}=-2$.

$e^{(3x+1)}=e^{1-5x}$; $\left(e^x\right)^2-3e^x+2=0$;

$e^{x^2-16}=e^{(x-4)}$; $e^{-x}+e^x=2$.

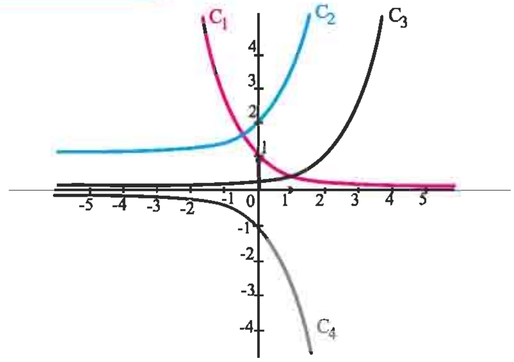
5 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.

$e^{-x}\le 1$; $e^{-3x}\ge 0$; $2-e^{\frac{1}{x}}>0$; $e^x+\dfrac{2}{e^x}-3\le 0$.

6 On a représenté dans un même repère les courbes représentatives des fonctions

$f:x\mapsto -e^x$, $g:x\mapsto e^{-x}$, $h:x\mapsto \dfrac{1}{e^{2-x}}$ et

$k:x\mapsto 1+e^x$.



Associer chaque fonction à sa courbe.

7 Déterminer les limites suivantes.

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^2-e^x$; $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{3x}-2e^x$; $\lim\limits_{x\to+\infty} 2e^x-\dfrac{1}{x}$;

$\lim\limits_{x\to-\infty} 2e^x-\dfrac{1}{x}$; $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^{-(1-x)}$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^2-2x+3\right)e^x$;

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^2-x\right)e^x$; $\lim\limits_{x\to0^+} xe^{\frac{1}{x}}$; $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3-e^{2x}$;

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{\sqrt{x+1}}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x-e^x}{x^2+x}$; $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{e^{\frac{-1}{x}}}{x}$;

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x-1}{x}$; $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\left(e^{2x}-e^x\right)$; $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{2x}-1}{x}$;

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{1-e^{-x}}$; $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{e^x-1}{\sqrt{2x}}$; $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)$;

$\lim\limits_{x\to-\infty} x(e^{\frac{1}{x^2}}-1)$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x(e^{\frac{1}{x}}-1)}{e^{\frac{1}{x}}+1}$;

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^2(e^{\frac{1}{x}}-e^{\frac{1}{x+1}})$; $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2(e^{\frac{1}{x}}-e^{\frac{1}{x+1}})$.

8 Pour chacune des fonctions suivantes, donner la dérivée f' sur l'intervalle I.

1. $f:x\mapsto 2x-e^{-x}$, $I=\mathbb{R}$.
2. $f:x\mapsto x^2+e^{\frac{1}{x}}$, $I=\mathbb{R}_+^*$.
3. $f:x\mapsto xe^{-x}$, $I=\mathbb{R}$.
4. $f:x\mapsto \dfrac{x-1}{e^x}$, $I=\mathbb{R}$.
5. $f:x\mapsto \dfrac{e^{2x}-1}{x^2+1}$, $I=\mathbb{R}$.

6. $f : x \mapsto 2x - 2\ln\left(1+e^x\right)$, $I = \mathbb{R}$.

7. $f(x) = e^x \ln(x)$, $I = \mathbb{R}_+^*$.

8. $f(x) = e^{-x}\left(e^{2x} + e^x - 1\right)$, $I = \mathbb{R}$.

9. $f : x \mapsto \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$, $I = \mathbb{R}$.

9 Dans chacun des cas ci-dessous, donner l'ensemble de définition de la fonction f et l'ensemble sur lequel elle est dérivable, calculer $f'(x)$, donner le tableau de variation de f et la représenter (on fera l'étude des branches infinies).

1. $f : x \mapsto e^{x^2}$.
2. $f : x \mapsto e^{-\frac{x^2}{2}}$.
3. $f : x \mapsto e^{\frac{1}{x}}$.
4. $f : x \mapsto e^{-\frac{1}{x}}$.
5. $f : x \mapsto e^{\sqrt{x}}$.
6. $f : x \mapsto \dfrac{x}{1+e^{-x}}$.

10 Dans chacun des cas suivants, déterminer une primitive de f sur l'intervalle I.

1. $f : x \mapsto e^{2x}$, $I = \mathbb{R}$.
2. $f : x \mapsto xe^{x^2+1}$, $I = \mathbb{R}$.
3. $f : x \mapsto \dfrac{e^{\tan x}}{\cos^2(x)}$, $I = \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$.
4. $f : x \mapsto \sin(2x)e^{\cos^2(x)}$, $I = \mathbb{R}$.
5. $f : x \mapsto \dfrac{1}{(x-1)^2}e^{\frac{1}{x-1}}$, $I =]1, +\infty[$.
6. $f : x \mapsto \sqrt{e^x}$, $I = \mathbb{R}$.
7. $f : x \mapsto \dfrac{e^{2x}}{1+e^{2x}}$, $I = \mathbb{R}$.
8. $f : x \mapsto xe^{2x^2}$, $I = \mathbb{R}$.

11 1. Calculer les intégrales suivantes.

a. $\displaystyle\int_0^1 \left(1+e^x\right)dx$. b. $\displaystyle\int_0^1 xe^{x^2}\,dx$.

c. $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x}dx$. d. $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{1+e^x}$.

e. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x}e^{\ln(x)}\,dx$ f. $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}dx$.

2. Calculer à l'aide des intégrations par parties les intégrales suivantes.

a. $\displaystyle\int_1^2 2xe^{-x}dx$. b. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^3}{e^{x^2}}dx$. c. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x}\sin x\,dx$.

d. $\displaystyle\int_0^{-\ln(2)} \frac{\ln\left(1+e^x\right)}{e^x}dx$. e. $\displaystyle\int_1^0 x^2e^x dx$.

12 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$f(x) = x - \dfrac{1}{1+e^x}$ et C sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormé.

1 a. Vérifier que pour tout réel x, $f'(x) > 0$.

b. Dresser le tableau d variation de f.

2. a. Montrer que les droites $\Delta_1 : y = x$ et $\Delta_2 : y = x - 1$ sont asymptotes à C.

b. Préciser les positions relatives de C et de ses asymptotes.

3 Tracer C.

13 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$f(x) = \dfrac{2+e^x}{1+e^x}$.

1. Vérifier que pour tout réel x, $f(x) = 2 - \dfrac{e^x}{1+e^x}$.

2. Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{2+e^x}{1+e^x}dx$.

14 1. Calculer les intégrales $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x}dx$ et $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{(1+e^x)^2}dx$.

2. Déterminer les réels a, b et c tels que

$$\frac{1}{(1+t)^2} = a + \frac{bt}{(1+t)} + \frac{ct}{(1+t)^2},\ t \geq 0 .$$

En déduire la valeur de $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\left(1+e^x\right)^2}dx$.

3. On pose $J=\int_0^1 \frac{xe^x}{\left(1+e^x\right)^3}dx$.

4. Exprimer J en fonction de I et en déduire la valeur de J.

15 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$f(x)=\frac{e^x}{1+e^x}$.

On désigne par C sa courbe dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. Dresser le tableau de variation de f.

2. Soit I le point de coordonnées $\left(0,\ \frac{1}{2}\right)$.

a. Vérifier que I appartient à C.

b. Montrer que I est un centre de symétrie de C.

c. Montrer que la tangente T à la courbe C au point I a pour équation $y=\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}$.

3. Montrer que pour tout réel x, $f'(x)\leq\frac{1}{4}$.

4. a Soit x un réel strictement positif

Montrer que $f(x)\leq\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}$.

b. En déduire les positions relatives de C et T.

5. Tracer C et T.

16 Soit la fonction $f:x\mapsto x-2+e^{-\frac{x}{2}}$.

On désigne par C la courbe de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. Etudier les variations de f.

2. a. Vérifier que la droite $D:y=x-2$ est une asymptote à C.

b. Tracer D et C.

3. Soit $\lambda>0$ et la droite $\Delta:x=\lambda$. On note $A(\lambda)$ l'aire de la partie du plan limitée par C, D, Δ et l'axe des ordonnées. Calculer $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}A(\lambda)$.

17 Calculer les limites ci-dessous.

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{3}\right)^x$.

2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{1-x}$.

3. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2^x}{2^{x^2+x}}$.

4. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^x-\left(\frac{1}{4}\right)^{x+1}$.

5. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3^x+3^{x+1}}{2^x+2^{x-1}}$.

6. $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\frac{1}{3}}-x^{\frac{2}{3}}$.

7. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{2^x}$.

8. $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\frac{1}{3}}e^{-x}$.

9. $\lim\limits_{x\to0^+}\left(x^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{4}{3}}\right)\ln x$.

10. $\lim\limits_{x\to+\infty}2^x-e^x$.

18 Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par

$f(x)=\ln\left(2^x\right)-\ln\left(x^2\right)$.

1. Calculer $f(2)$ et $f(4)$.

2. Etudier les variations de la fonction f et en déduire son signe.

3. Comparer x^2 et 2^x.

19 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par

$f(x)=\frac{4^x}{4^{2x}-1}$.

1. Montrer que f est impaire.

2. Etudier les variations de f sur $]0,+\infty[$.

3. a. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x)=\frac{4}{15}$.

b. En déduire les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $f(x)=-\frac{4}{15}$.

20 Calculer les intégrales suivantes.

1. $\int_0^1 3^x dx$.

2. $\int_0^{-1}\frac{3^x}{1+3^x}dx$.

3. $\int_1^2 x^{\frac{4}{3}}dx$.

4. $\int_{\frac{1}{2}}^1 4x^{-\frac{1}{5}}dx$.

5. $\int_0^1\sqrt[4]{x}\,dx$.

6. $\int_0^{\frac{1}{\ln(2)}}2^x\left(1+2^x\right)^2dx$.

21 Soit g la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par

$$g(t)=\begin{cases}\frac{1-e^{-t}}{t} & \text{si } t>0,\\ 1 & \text{si } t=0.\end{cases}$$

1. a. Établir que g est continue à droite en 0.
b. Déterminer la limite de g en $+\infty$.
2. a. Calculer $g'(t)$, pour tout $t > 0$.
b. Prouver que pour tout $t \geq 0$, $1 - t \leq e^{-t}$.
En déduire en intégrant sur $[0, x]$ que

$e^{-x} \leq 1 - x + \frac{x^2}{2}$, $x \geq 0$.

c. Montrer alors que $e^{-u} \geq 1 - u + \frac{u^2}{2} - \frac{u^3}{6}$, $u \geq 0$.
d. Prouver que g est dérivable en 0 et donner la valeur de $g'(0)$.
4. Tracer la courbe de g dans un repère orthonormé.

22 On considère la fonction h définie sur $[0,+\infty[$ par $h(x) = (x-2)e^x + 2$
1. Déterminer les variations de h (on précisera h(0)).
2. Montrer qu'il existe un unique réel a de l'intervalle $[1, 2]$ tel que $h(a) = 0$.
En déduire le signe de h sur $[0,+\infty[$.
3. Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$

par $f(x) = \frac{e^x - 1}{x^2}$.

a. Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
b. Montrer que pour tout réel x strictement positif
$f'(x) = \frac{xe^x - 2e^x + 2}{x^3}$.
Dresser le tableau de variation de f.
c. Montrer que $f(a) = \frac{-1}{a(a-2)}$ et en déduire le signe de $f(a)$.
4. Tracer la courbe de f dans un repère orthonormé.

23 Soit la fonction $f : x \mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.
On désigne par C la courbe de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
1. Etudier la parité de f.
2. a. Etudier les variations de f.
b. Tracer C.
3. Soit $\lambda > 1$ et la droite $\Delta : x = \lambda$.
On note $A(\lambda)$ l'aire de la partie du plan limitée par C, Δ, l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées.
Calculer $A(\lambda)$.

24 Soit f la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par

$f(x) = xe^{-x} - \frac{1}{2}x$.

1. Calculer la dérivée de f ainsi que $\lim_{x \to +\infty} f(x)$.
2. a. On désigne par g la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $g(x) = (1-x)e^{-x} - \frac{1}{2}$.
b. Etudier le sens de variation de g et montrer que l'équation $g(x) = 0$ a une solution unique a sur $[0, 0.5]$.
c. En déduire le signe de $g(x)$ sur $[0,+\infty[$.
d. Déterminer les variations de f.
2. Soit h la fonction définie sur $[0, 0.5]$ par

$h(x) = 1 - \frac{1}{2}e^x$.

a. Montrer que a est l'unique solution sur $[0, 0.5]$ de l'équation $h(x) = x$.
b. Etudier les variations de h.
c. En déduire que $h([0, 0.5]) \subset [0, 0.5]$.
c. Prouver que pour tout x de $[0, 0.5]$,
$-0,83 \leq h'(x) \leq 0$.
En déduire que pour tout x de $[0, 0.5]$,
$|h(x) - a| \leq 0,83|x - a|$.
3. Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par

$$\begin{cases} u_0 = 0, \\ u_{n+1} = h(u_n). \end{cases}$$

a. Montrer que pour tout entier n, u_n appartient à $[0, 0.5]$ et $|u_{n+1} - a| \leq 0,83|u_n - a|$.
b. En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

25 I. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$f(x) = (3+x)e^{-\frac{x}{2}}$.

1. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. Dresser le tableau de variation de f.
3. Construire la courbe C de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

4. a. Montrer que l'équation $f(x)=3$ admet deux solutions dans $\mathbb{R}$.
Soit α la solution non nulle, montrer que
$-2<\alpha<-\frac{3}{2}$.
b. Déterminer graphiquement suivant les valeurs du nombre réel m, le nombre de solutions de l'équation $f(x)=m$.
II. On considère la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par
$\varphi(x)=3e^{\frac{x}{2}}-3$.
1. Montrer que $f(x)=3$, si et seulement si, $\varphi(x)=x$.
2. a. Calculer, pour tout réel x, $\varphi'(x)$ et $\varphi''(x)$.
Justifier que $\varphi'(\alpha)=\frac{\alpha+3}{2}$.
b. Étudier le sens de variation de φ', puis celui de φ.
c. On se place désormais dans l'intervalle $I=[-2, \alpha]$.
3. a. Montrer que $\varphi(I)\subset I$.
b. montrer que $\frac{1}{2}\leq\varphi'(x)\leq\frac{3}{4}$, pour tout x de I.
c. En déduire en intégrant sur $[x,\alpha]$ que pour tout x de l'intervalle I,
$0\leq\frac{1}{2}(\alpha-x)\leq\varphi(\alpha)-\varphi(x)\leq\frac{3}{4}(\alpha-x)$.
4. On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par
$\begin{cases} u_0=-2, \\ u_{n+1}=\varphi(u_n). \end{cases}$
a. Montrer que pour tout entier n, u_n appartient à l'intervalle I.
b. Justifier que, pour tout entier n,
$0\leq\alpha-u_{n+1}\leq\frac{3}{4}(\alpha-u_n)$.
c. En déduire que la suite (u_n) est convergente et donner sa limite.
d. Déterminer le plus petit entier naturel k tel que
$\left(\frac{3}{4}\right)^k\leq10^{-2}$.
Donner, à l'aide d'une calculatrice, une approximation à 10^{-2} près de u_k.
En déduire une valeur approchée de α à 2×10^{-2} près.

26 Soit f la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $f(x)=xe^{-x+2}$.

I. 1. Dresser le tableau des variation de f sur $[0,+\infty[$.
2. Déterminer les branches infinies de la courbe représentative C de f, dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.
2. a. Tracer les courbes de la fonction f et de la fonction ln. On notera C′ cette dernière.
Conjecturer avec ce graphique le nombre de solutions de l'équation $f(x)=\ln x$ dans $[1,+\infty[$.
b. Montrer que la fonction g définie sur $]0,+\infty[$ par $g(x)=\ln x-f(x)$, est strictement croissante sur $[1,+\infty[$.
En déduire que l'équation $f(x)=\ln x$ admet une unique solution α dans $[1,+\infty[$.
c. Déterminer à 10^{-2} près une valeur approchée de α.
II . À l'aide d'une double intégration par parties déterminer $I=\int_0^3 x^2e^{-2x}dx$.
2. On définit le solide S obtenu par révolution autour de l'axe (Ox) de la courbe d'équation $y=f(x)$ pour $0\leq x\leq3$.
Déterminer une valeur approchée à 1u.a près du volume V du solide S.

27 I. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=e^x(1-x)+1$.

1. Étudier le sens de variation de g.
2. Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution dans l'intervalle $[1.27, 1.28]$
on note a cette solution.
3. Déterminer le signe de g(x).
II. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par
$f(x)=\frac{x}{e^x+1}+2$.
On désigne par C la courbe de f dans un repère orthogonal $(O,\vec{i},\vec{j})$.
1. Déterminer la limite de f en $+\infty$ et interpréter.
2. a. Déterminer la limite de f en $-\infty$.
b. Montrer que la droite D d'équation $y=x+2$ est une asymptote à C.

c. Étudier la position de C par rapport à D.
3. a. Montrer que la fonction dérivée de f a même signe que la fonction g.
b. Dresser le tableau de variations de f.
4. Tracer la courbe C ainsi que ses asymptotes et sa tangente au point d'abscisse a.
III. Pour tout entier naturel n, tel que $n \geq 2$, on note D_n l'ensemble des points M(x, y) du plan, dont les coordonnées vérifient $2 \leq x \leq n$ et $2 \leq y \leq f(x)$ et on appelle A_n son aire, exprimée en unités d'aire.
1. Faire apparaître D_5 sur la figure.
2. Montrer que pour tout réel $x \geq 2$,
$\frac{7}{8}xe^{-x} \leq \frac{x}{e^x+1} \leq xe^{-x}$.
3. On pose $I_n = \int_2^n xe^{-x}dx$. À l'aide d'une intégration par parties, calculer I_n en fonction de n.
4. Écrire un encadrement de A_n en fonction de I_n.
5. Montrer que la suite (A_n) est croissante et majorée.
Déterminer la limite de I_n lorsque n tend vers $+\infty$.
Que peut-on en déduire pour la limite de A_n lorsque n tend vers $+\infty$?

28 I. On considère la fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par $f(x) = \ln(e^x + e^{-x})$ et on désigne par C sa courbe dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
1. a. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
b. Montrer que, pour tout x de l'intervalle $[0,+\infty[$,
$f(x) = x + \ln(1+e^{-2x})$. En déduire que la courbe C admet comme asymptote la droite D d'équation $y = x$.
c. Étudier la position de la courbe C par rapport à son asymptote D.
2. Étudier les variations de f et dresser son tableau de variation.
3. Tracer C et D.
II. Pour tout *x* de l'intervalle $[0,+\infty[$ on pose
$F(x) = \int_0^x \ln(1+e^{-2t})\,dt$.
(On ne cherchera pas à calculer F(x)).
1. Soit a un réel positif. En utilisant la partie I, donner une interprétation géométrique de F(a).
2. Étudier le sens de variation de F sur l'intervalle $[0,+\infty[$.
3. Soit a un réel strictement positif. Montrer que
$\frac{1}{1+a} \leq \frac{1}{1+t} \leq 1,\ t \in [0,\ a]$.
En déduire que $\frac{a}{1+a} \leq \ln(1+a) \leq a$.
4. Soit x un réel positif. Déduire, de la question précédente, que $\int_0^x \frac{e^{-2t}}{1+e^{-2t}}dt \leq F(x) \leq \int_0^x e^{-2t}dt$
puis que $\frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{2}\ln(1+e^{-2x}) \leq F(x) \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2x}$.
5. On admet que la limite de F(x), lorsque x tend vers $+\infty$, existe et est un nombre réel noté L.
Etablir que $\frac{1}{2}\ln 2 \leq L \leq \frac{1}{2}$.
6. Pour tout entier naturel n, on pose
$u_n = \int_n^{n+1} \ln(1+e^{-2t})dt$.
a. On considère la fonction h définie sur $[0,+\infty[$ par
$h(t) = \ln(1+e^{-2t})$.
Étudier le sens de variation de h.
b. Montrer que pour tout naturel n,
$0 \leq u_n \leq \ln(1+e^{-2n})$.
c. Déterminer la limite de (u_n) lorsque n tend vers $+\infty$.
7. Pour tout entier naturel n, on pose $S_n = \sum_{i=0}^{n-1} u_i$.
Exprimer S_n à l'aide de F et de n.
La suite (S_n) est-elle convergente ?
Dans l'affirmative quelle est sa limite ?

29 I. Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (x+1)^2e^{-x}$ et C la courbe de g dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
1. a. Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.
b. Déterminer g' et montrer que $g'(x)$ est du signe de $(1-x^2)$.
c. Dresser le tableau de variation de g.

2. Tracer la courbe C. On placera en particulier les points de la courbe d'abscisses respectives -2 , -1 , 0 , 1 et 3.
3. a. Déterminer graphiquement, suivant les valeurs du nombre réel k, le nombre de solutions de l'équation $g(x)=k$.
b. Montrer que l'équation $g(x)=2$ admet une unique solution α.
Montrer que α appartient à l'intervalle $[-2, -1]$.
c. Montrer que α vérifie la relation $\alpha=-1-\sqrt{2}e^{\frac{\alpha}{2}}$.
II. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $I=[-2, -1]$ par $f(x)=-1-\sqrt{2}e^{\frac{x}{2}}$.
1. a. Étudier les variations de f sur I.
b. En déduire que, pour tout élément x de I, $f(x)$ appartient à I.
c. Montrer que, pour tout élément x de I, $|f'(x)|\leq\frac{1}{\sqrt{2e}}$.
d. Montrer que, pour tout élément x de I, $|f(x)-\alpha|\leq\frac{1}{2}|x-\alpha|$.
2. Soit (u_n) la suite d'éléments de I définie par la relation de récurrence $u_{n+1}=f(u_n)$, $n\geq 0$ et $u_0=-\frac{3}{2}$.
a. Montrer que, pour tout entier naturel n, $|u_{n+1}-\alpha|\leq\frac{1}{2}|u_n-\alpha|$.
b. Montrer que la suite (u_n) converge et préciser sa limite.
c. Déterminer un entier n_0 tel que u_{n_0} soit une valeur approchée de α à 10^{-3} près.
Calculer u_{n_0}.

30 I. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=\frac{e^x}{1+2e^x}-\ln(1+2e^x)$.
1. Calculer $g'(x)$ et en déduire son signe.
2. Déterminer la limite de g en $-\infty$.
3. Dresser le tableau de variation de la fonction g. En déduire le signe de g.

II. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=e^{-2x}\ln(1+2e^x)$.
1. montrer que pour tout réel x, $f'(x)=2e^{-2x}g(x)$.
2. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
3. Dresser le tableau de variation de f.
4. On note C la courbe de f dans un repère orthogonal $(O,\vec{i},\vec{j})$.
a. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0.
b. Tracer la courbe C et la tangente T

31 I. 1. Soit g la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $g(x)=e^x-x-1$.
a. Etudier les variations de g.
b. En déduire le signe de g.
2. Soit h la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $h(x)=(2-x)e^x-1$.
a. Etudier la fonction h et dresser son tableau de variation.
b. Montrer que l'équation $h(x)=0$ admet une solution unique α dans $[1, 2]$.
c. Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.
d. Préciser suivant les valeurs du réel positif x le signe de h(x).
II. Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x)=\frac{e^x-1}{e^x-x}$ et C sa courbe dans un repère orthonormé.
1. a. Montrer que pour tout $x\neq 0$ on peut écrire $f(x)=\frac{1-e^{-x}}{1-xe^{-x}}$. En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et interpréter.
b. Montrer que $f'(x)=\frac{h(x)}{(e^x-x)^2}$.
c. Dresser le tableau de variation de f.
2. a. Montrer que pour tout x, $f(x)-x=\frac{(1-x)g(x)}{e^x-x}$.
b. En déduire la position relative de la courbe C et de la droite Δ d'équation $y=x$.
3. a. Préciser la tangente à C en son point d'abscisse 0.
b. Tracer C.

III. Soit la suite (u_n) définie par

$$u_n = \int_0^n (f(x)-1)dx.$$

1. Donner l'expression de u_n en fonction de n.
2. Interpréter géométriquement le nombre réel $-u_1$.
3. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

32 I. Soit u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$u(x) = xe^x - e^x + 1.$$

1. a. Dresser le tableau de variation de la fonction u et en déduire que $u(x) \geq 0$ pour tout réel x.

b. Montrer que, pour tout réel x, $u(x) = \int_0^x te^t dt$.

2. a. Montrer que pour tout $0 \leq t \leq x$, $t \leq te^t \leq te^x$ et en déduire que , pour tout réel positif x,

$$\frac{1}{2}x^2 \leq u(x) \leq \frac{1}{2}x^2e^x.$$

b. Montrer que, pour tout $x \leq t \leq 0$, $t \leq te^t \leq te^x$ et en déduire que , pour tout réel négatif x,

$$\frac{1}{2}x^2e^x \leq u(x) \leq \frac{1}{2}x^2.$$

3. a. Calculer en utilisant la question précédente,

$$\lim_{x\to0} \frac{u(x)}{x^2}.$$

b. En déduire $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{u(x)}{x(e^x-1)} = \dfrac{1}{2}$.

II. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{e^x-1} & \text{si } x \neq 0, \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

1. a. Montrer que f est continue en 0.
b. Montrer que f est dérivable en 0 et calculer $f'(0)$.

2. a. Montrer que, $f'(x) = \dfrac{-u(x)}{(e^x-1)^2}$, $x \neq 0$.

b. Dresser le tableau de variation de f.
3. Soit C la courbe de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

a. Montrer que C admet au voisinage de $-\infty$ une asymptote D dont on donnera une équation.
b. Tracer C et D.

33 I. Soit g la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par

$$g(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x}}.$$

1. Etudier les variations de g.
2. En déduire que $0 < g(x) < 1$, $x > 0$.

II. Soit f fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} x\ln(-x) & \text{si } x < 0, \\ x\left(2-e^{-\frac{1}{x}}\right) & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

1. a. Montrer que est continue en 0.
b. Etudier la dérivabilité de f à droite et à gauche en 0.
c. Montrer que $f'(x) = 2 - g(x)$, $x > 0$.
2. Dresser le tableau de variation de f.
3. Soit C la courbe de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

a. Montrer que C admet au voisinage de l'infini une asymptote D dont on donnera une équation.
b. Montrer que la droite D est tangente à la courbe C en un point d'abscisse négative que l'on déterminera.
c. Etudier la position relative de C et D pour $x \geq 0$.
d.Tracer C et D.
e. Tracer dans le même repère la courbe C', symétrique de C par rapport à l'axe des abscisses.

III. Soit α un réel de $]-1,0[$ et $A(\alpha)$ l'aire de la partie du plan limitée par les courbes C et C' et les droites d'équations $x = \alpha$ et $x = -1$.

1.Calculer $\int_{-1}^{\alpha} f(x)dx$.

2.En déduire $A(\alpha)$.

3. Déterminer la limite de $A(\alpha)$ quand α tend vers 0.

Chapitre 10

Equations différentielles

Le pendule isochrone. Le problème consiste à modifier le pendule standard pour rendre la période indépendante de l'amplitude.
Hygens (1673, Horologium Oscillatorium) a l'idée de modifier le cercle du pendule standard pour que la force accélératrice devienne proportionnelle à la longueur d'arc s.
Le mouvement du pendule serait alors décrit par $s''+Ks=0$, dont les oscillations sont indépendantes de l'amplitude.

(Œ.Haier et al, L'analyse au fil de l'histoire, 2000).

Chapitre 10

Equations différentielles

I. Définition

Activité 1

1. Soit la fonction $f : x \mapsto e^{-x}$. Déterminer une relation entre f' et f.
2. Reprendre la même question pour les fonctions $g : x \mapsto -2e^{-x}$ et $h : x \mapsto 0,5e^{-x}$.
3. Représenter les fonctions f, g et h dans un même repère orthonormé.
4. Donner d'autres fonctions qui vérifient la relation trouvée dans la première question.

Activité 2

Une expérience consiste à étudier l'évolution d'une population de bactéries.
On désigne par N_0 le nombre de bactéries à l'instant $t = 0$, $N(t)$ le nombre de bactéries à l'instant t et on note $N'(t)$ la vitesse instantanée d'évolution des bactéries à l'instant t.

1. On constate que $N(t) = 9000e^{-0,4t}$.
   a. Donner le nombre de bactéries aux instants $t = 0$, $t = 10$ et $t = 20$.
   b. Donner une relation entre N' et N.
   c. Déterminer la vitesse instantanée d'évolution aux instants $t = 10$ et $t = 20$.
   d. Représenter la fonction $t \mapsto N(t)$.
2. Reprendre les questions précédentes si on suppose que $N(t) = 3000e^{-0,4t}$.

Vocabulaire

Une équation de la forme $y' = ay$, où l'inconnue y est une fonction et a est un réel, est appelée équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficient constant.
Résoudre dans $\mathbb{R}$ une équation de la forme $y' = ay$, c'est trouver toutes les fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ qui vérifie $y' = ay$.
Ces fonctions sont appelées solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation $y' = ay$.

Théorème

Soit a un réel. L'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y' = ay$ est l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto ke^{ax}$, où k est un réel quelconque.

Démonstration

Désignons par (E) l'équation différentielle $y' = ay$.

Pour tout réel k, la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ke^{ax}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et vérifie $f'(x) = kae^{ax} = af(x)$, pour tout x de $\mathbb{R}$.

Réciproquement, montrons que toute solution g de (E) est telle que $g(x) = ke^{ax}$, pour tout x de $\mathbb{R}$.

Soit g une solution de (E) et h la fonction définie pour tout réel x par $h(x) = g(x)e^{-ax}$,

La fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $h'(x) = g'(x)e^{-ax} - ag(x)e^{-ax}$, pour tout réel x.

La fonction g étant solution de (E) par hypothèse, on en déduit que

$h'(x) = ag(x)e^{-ax} - ag(x)e^{-ax}$, ou encore que $h'(x) = 0$, pour tout réel x.

Ce qui implique que la fonction h est constante sur $\mathbb{R}$, c'est à dire qu'il existe un réel k tel que $h(x) = g(x)e^{-ax} = k$, pour tout x de $\mathbb{R}$.

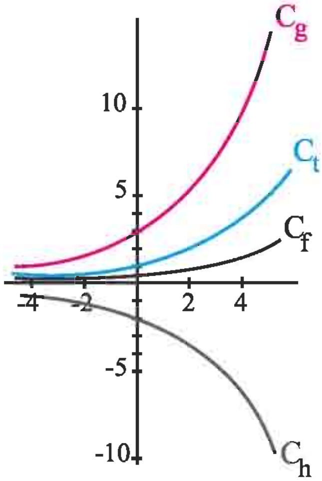
Il en résulte que $g(x) = ke^{ax}$, pour tout réel x.

Activité 3

Le plan est muni d'un repère orthogonal.

On a représenté ci-contre les courbes représentatives de quatre fonctions f, g, h et t, solutions de l'équation $y' = 0.3y$.

Donner les expressions des fonctions f, g, h et t.



Activité 4

1. a. Résoudre l'équation différentielle $(E): 2y' + 3y = 0$.

   b. Montrer qu'il existe une unique solution f de (E) vérifiant $f(0) = -3$.

   c. Représenter graphiquement cette solution.

2. Reprendre la question précédente pour l'équation $(E): y' = 0$.

Théorème

Soit a un réel non nul. Pour tous réels x_0 et y_0, l'équation $y' = ay$ admet une unique solution qui prend la valeur y_0 en x_0.

C'est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto y_0 e^{a(x - x_0)}$.

Démonstration

Soit f une solution de (E) qui prend la valeur y_0 en x_0.

Alors $f(x)=ke^{ax}$, pour tout x de $\mathbb{R}$ et $ke^{ax_0}=y_0$. Il en résulte que $k=y_0e^{-ax_0}$.

Par suite $f(x)=y_0e^{a(x-x_0)}$, $x\in\mathbb{R}$.

Activité 5

Le plan est muni d'un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

Représenter graphiquement la fonction f dont la courbe C_f passe par le point $A(1,2)$ et telle que la tangente en tout point M de C_f a un coefficient directeur égal au double de l'ordonnée de M.

Activité 6

On considère une substance radioactive. On désigne par $N(t)$ le nombre de noyaux radioactifs existants dans la substance à l'instant t (exprimé en années) et par N_0 le nombre de noyaux existants à $t=0$.

On constate que la vitesse $N'(t)$ de désintégration des noyaux à l'instant t est proportionnelle au nombre $N(t)$, avec un coefficient de proportionnalité égal à $-\lambda$, où le réel strictement positif λ est appelé constante radioactive du noyau.

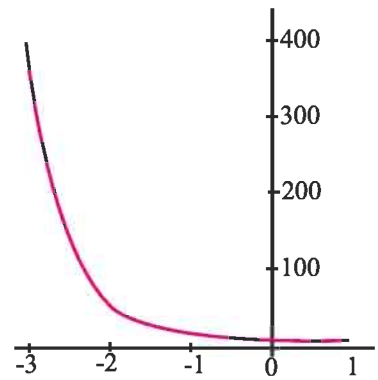
1. Donner l'expression de $N(t)$.
2. Déterminer, en fonction de λ, le temps $T_{0.5}$ au bout duquel la moitié des noyaux s'est désintégrée. ($T_{0.5}$ est appelé durée de demi-vie de la substance).
3. On suppose que la substance radioactive est du carbone 14.
   a. Déterminer λ sachant que $T_{0.5}=5730$.
   b. Déterminer l'âge d'un fragment d'os qui contient 60% de la quantité initiale.

II. Equations différentielles du type $y' = ay + b$, où a et b sont deux réels tels que $a \neq 0$

Activité 1

On a représenté ci-contre la fonction $f : x \mapsto e^{-2x} + 3$.

1. Montrer que f vérifie l'équation différentielle $(E) : y' = -2y + 6$.
2. Montrer que g est solution de (E), si et seulement si, $h : x \mapsto g(x) - 3$ est solution de l'équation différentielle $y' = -2y$.
3. Donner toutes les solutions de (E).



Théorème

Soit a et b deux réels tels que $a \neq 0$.
L'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y' = ay + b$ est l'ensemble des fonctions $f : x \mapsto ke^{ax} - \frac{b}{a}$, où k est un réel quelconque.
De plus pour tous réels x_0, y_0, la fonction $f : x \mapsto \left(y_0 + \frac{b}{a}\right)e^{a(x-x_0)} - \frac{b}{a}$ est l'unique solution de $y' = ay + b$, telle que $f(x_0) = y_0$.

Démonstration

Soit a non nul.

L'équation différentielle (E): $y' = ay + b$, est équivalente à l'équation différentielle

$(E_1) : \left(y + \frac{b}{a}\right)' = a\left(y + \frac{b}{a}\right)$.

On en déduit qu'une fonction f est solution de (E), si et seulement si, $f + \frac{b}{a}$ est solution de (E_1). Il en résulte que les solutions de (E) sont les fonctions $f : x \mapsto ke^{ax} - \frac{b}{a}$, où k est un réel quelconque.

Si f est une solution de (E) prenant la valeur y_0 en x_0, alors

$f(x_0) = ke^{ax_0} - \frac{b}{a} = y_0$. On en déduit que $k = (y_0 + \frac{b}{a})e^{-ax_0}$, ou encore que f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \left(y_0 + \frac{b}{a}\right)e^{a(x-x_0)} - \frac{b}{a}$.

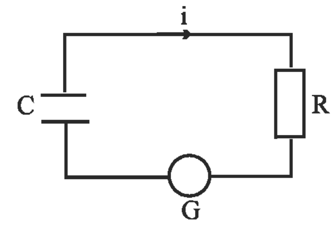
Activité 2

Donner, dans chacun des cas ci-dessous, la solution f de l'équation différentielle et la représenter.

a. $\sqrt{2}y' - 2y = 1,\ f(0) = -1.$ b. $\sqrt{2}y' - 2y = 1,\ f(0) = -\frac{1}{2}.$

Activité 3

Un circuit électrique est constitué d'un générateur G délivrant une tension E, d'un condensateur C et d'une résistance R.



On désigne par $i(t)$ l'intensité du courant électrique à l'instant t (en seconde) et par $q(t)$ la charge à l'instant t.

1. Donner une relation entre $i(t)$ et $q'(t)$.
2. Montrer que $Rq'(t) + \frac{1}{C}q(t) = E$.
3. Donner l'expression de $q(t)$, puis de $i(t)$.
4. Représenter $t \mapsto i(t)$ si l'on sait que $i(0) = 10$ mA.

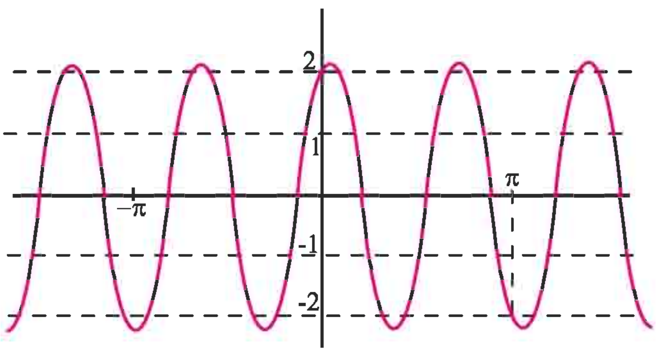
III. Equations différentielles du type $y'' + \omega^2 y = 0$, ω réel

Activité 1

1. On considère la fonction $f : x \mapsto \sin x + \cos x$.
   a. Déterminer les réels $r > 0$ et φ appartenant à $]-\pi, \pi]$ tels que $f(x) = r\cos(x - \varphi)$ pour tout réel x.
   b. Ecrire f'' en fonction de f.
   c. Représenter la fonction f.
2. Reprendre les questions précédentes pour la fonction $g : x \mapsto \sqrt{3}\sin(2x) - \cos(2x)$.

Activité 2

Dans la figure ci-contre on a représenté la courbe d'une fonction de la forme $f : x \mapsto a\sin(3x) + b\cos(3x)$.



1. Déterminer les réels a et b.
2. Montrer que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et trouver une relation entre f'' et f.

Vocabulaire

Une équation de la forme $y''+\omega^2 y=0$, où l'inconnue y est une fonction et ω est un réel, est appelée équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants.

Résoudre une équation de la forme $y''+\omega^2 y=0$, c'est trouver toutes les fonctions deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ qui la vérifient.

Activité 3

On considère l'équation différentielle $(E): y''+9y=0$, où l'inconnue y est une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que la fonction $x \mapsto \sin(3x)$ est solution de (E) sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que la fonction $x \mapsto \cos(3x)$ est solution de (E) sur $\mathbb{R}$.
3. a. Montrer que pour tous réels a et b, la fonction $f: x \mapsto a\sin(3x)+b\cos(3x)$ est solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

   b. On suppose que $f(0)=\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $f'(0)=\frac{3}{2}$. Déterminer a et b.

   c. En déduire les réels $r>0$ et φ appartenant à $]-\pi,\pi]$ tels que $f(x)=r\cos(3x-\varphi)$ pour tout réel x.

   d. Représenter f.

Activité 4

Soit ω un réel non nul, x_0 et y_0 deux réels.

On considère l'équation différentielle $(E): y''+\omega^2 y=0$

1. Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\frac{y_0}{\omega}\sin(\omega x)+x_0\cos(\omega x)$

est solution de (E).

Vérifier que $f(0)=x_0$ et $f'(0)=y_0$.

2. On suppose qu'il existe une autre fonction g solution de (E) qui vérifie

$g(0)=x_0$ et $g'(0)=y_0$.

Soit h la fonction définie par $h(x)=\omega^2\left(f(x)-g(x)\right)^2+(f'(x)-g'(x))^2$.

a. Montrer que h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et vérifier que pour tout réel x,

$h'(x)=2\omega^2\left(f'(x)-g'(x)\right)(f(x)-g(x))+2\left(f''(x)-g''(x)\right)\left(f'(x)-g'(x)\right)$.

b. En déduire que la fonction h est constante sur $\mathbb{R}$.

c. Calculer $h(0)$ et conclure.

Théorème

Soit ω un réel non nul et x_0, y_0 deux réels.

L'équation $y''+\omega^2 y=0$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$ vérifiant $f(0)=x_0$ et $f'(0)=y_0$.

C'est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{y_0}{\omega}\sin(\omega x)+x_0\cos(\omega x)$.

Conséquence

Soit ω un réel non nul.

La fonction nulle est l'unique solution de l'équation différentielle $y''+\omega^2 y=0$ qui vérifie $y(0)=y'(0)=0$.

Activité 5

1. a. Déterminer la solution f de l'équation différentielle $y''+4y=0$,telle que

$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=-1$ et $f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=2$.

b. Représenter f .

c. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations $f(x)=1$, $f(x)=-1$.

2. Reprendre les questions précédentes pour la solution g de l'équation différentielle $y''+\pi^2 y=0$, qui vérifie $g(0)=0$ et $g'(0)=1$.

Activité 6

Soit ω un réel non nul et l'équation différentielle $(E): y''+\omega^2 y=0$.

A/ 1. Montrer que les fonctions $x\mapsto\cos(\omega x)$ et $x\mapsto\sin(\omega x)$ sont des solutions de (E).

2. Montrer que pour tous réels A et B la fonction $x\mapsto A\sin(\omega x)+B\cos(\omega x)$ est une solution de (E).

B/ Soit f une solution de (E).

1. Montrer que pour tous réels A et B la fonction g définie pour tout réel x par $g(x)=f(x)-A\sin(\omega x)-B\cos(\omega x)$ est une solution de (E).

2. a. Déterminer $g'(x)$, $x\in\mathbb{R}$.

b. En déduire qu'il existe un unique couple (A,B) de réels tel que $g(0)=g'(0)=0$.

3. Montrer alors que les solutions de (E) sont les fonctions $x\mapsto A\sin(\omega x)+B\cos(\omega x)$, $(A,B)\in\mathbb{R}^2$.

Théorème

Soit ω un réel non nul.

L'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y'' + \omega^2 y = 0$ est l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = A\sin(\omega x) + B\cos(\omega x)$, $(A, B) \in \mathbb{R}^2$.

Activité 7

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $y'' + 9y = 0$.
2. Montrer qu'il existe une seule solution de (E) telle que $f\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$.
3. Existe-il une solution de (E) telle que $f(0) = \frac{1}{2}$ et $f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 1$?

Problème résolu

Un mobile se déplace sur un axe horizontal $(x'x)$ avec un mouvement uniformément varié.

On désigne par $x(t)$ la position du mobile à l'instant, $x'(t)$ sa vitesse et $x''(t)$ son accélération. (t est exprimé en secondes et $x(t)$ en mètres).

On suppose de plus qu' à tout instant t, l'accélération $x''(t)$ est proportionnelle à $x(t)$ avec un coefficient égal à $-\frac{\pi^2}{4}$.

1. Donner l'équation horaire du mouvement si l'on sait que $x(1) = 2$ et $x(2) = 0$.
2. déterminer la position et la vitesse du mobile à l'instant $t = 0$.
3. Représenter $t \mapsto x(t)$.

Solution

1. La fonction $x \mapsto x(t)$ est la restriction à $\mathbb{R}_+$ de la solution de l'équation différentielle

$x'' + \frac{\pi^2}{4}x = 0$ qui vérifie $x(1) = 2$ et $x(2) = 0$.

Il existe deux réels A et B tels que $x(t) = A\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) + B\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right), t \in \mathbb{R}_+$.

De l'hypothèse $x(1) = 2$ et $x(2) = 0$ on en déduit que $A = 2$ et $B = 0$.

Par conséquent l'équation horaire du mouvement est $x(t) = 2\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)$, $t \geq 0$.

2. • A l'instant $t=0$, $x(0)=0$, c'est-à-dire le mobile est à l'origine du repère.

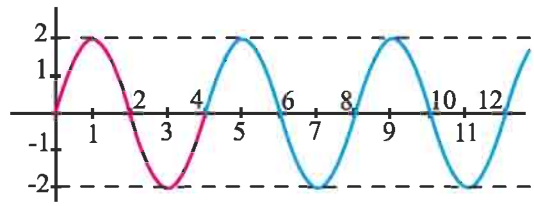
• Pour tout $t \geq 0$, $x'(t)=\pi\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)$.

Par conséquent $x'(0)=\pi$, c'est-à-dire la vitesse à l'instant $t=0$ est π m/s.

3. La fonction $t \mapsto 2\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)$ est périodique de période 4, il suffit donc de l'étudier sur $[0,4]$. Pour tout $t \geq 0$, $x'(t)=\pi\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)$.

Tableau de variation de f sur $[0,4]$.

t	0		1		3		4
x'(t)		+	0	−	0	+	
x(t)	0	↗	2	↘	−2	↗	0



QCM

Cocher la réponse exacte.

1. La fonction $x \mapsto 2e^{2x}$ est solution de l'équation différentielle

□ $y' = 4y$. □ $y' = -4y$. □ $y' = 2y$.

2. Si f est la solution de l'équation différentielle $y' = 2y$ telle que $f(0) = 1$ alors la courbe de f admet une tangente

□ horizontale. □ parallèle à $y = 2x$. □ parallèle à $y = -x$.

3. Si f est la solution de l'équation différentielle $y' = -y + 1$ telle que $f(0) = 1$ alors la fonction f est

□ négative. □ positive. □ n'a pas un signe constant.

4. La fonction $x \mapsto 2\cos x - 3\sin x$ est solution de l'équation différentielle

□ $y'' + 2y = 0$. □ $y'' + y = 0$. □ $y'' + 3y = 0$.

VRAI – FAUX

Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse.

1. La fonction $f : x \mapsto 2^x$ est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' - y\ln 2 = 0$.

2. Si f est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' = -2y$ alors la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$.

3. Si f est la solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' = 3y$ telle que $f'(1) = 3$ alors $f(1) = 1$.

4. Si f est la solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y'' + 2y = 0$ qui s'annule et change de signe en $\frac{\pi}{4}$ alors sa courbe dans un repère orthonormé admet un point d'inflexion.

1 1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ chacune des équations différentielles ci-dessous.

a. $y'+3y=0$.

b. $y'+\sqrt{2}y=0$.

c. $-5y'+y=0$.

2. Pour chacun des cas ci-dessous, donner la solution f sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle.

a. $y'-\frac{y}{2}=0$ et $y(-1)=e$.

b. $-3y'-y=0$ et $y(\ln 8)=1$.

c. $y'-2y=0$ et $y(0)=1$.

3 1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ chacune des équations différentielles ci-dessous

a. $y'-2y+1=0$.

b. $y'-\pi y+3=0$.

c. $-2y'+5y-1=0$.

2. Pour chacun des cas ci-dessous, donner la solution f sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle.

a. $y'-y-1=0$ et $y(2)=0$.

b. $2y'+y-3=0$ et $y(0)=3$.

c. $y'+3y+\frac{3}{4}=0$ et $y(-1)=0$.

4 La loi de refroidissement de Newton, établit que la vitesse instantanée de perte de chaleur d'un corps homogène et inerte est proportionnelle à la différence de température entre le corps et le milieu.

On suppose que la température de l'air ambiant est constante et égale à 25 °C.

Dans ces conditions, la température d'un corps homogène et inerte passe de 100 °C à 75 °C en 15minutes.

On désigne par $f(t)$ la température de ce corps à t minutes.

1. Vérifier qu'il existe un réel a tel que

$$\begin{cases} f'(t)=a(f(t)-25) \\ f(0)=100 \\ f(15)=75 \end{cases}$$

2. Déterminer f.

3. Au bout de combien de temps (à 1 minute près) , ce corps aura une température de 25°C ?

5 Une substance se dissout dans l'eau à une vitesse instantanée proportionnelle à la quantité non encore dissoute.

On place 20 g de cette substance dans un volume d'eau suffisant pour la dissoudre totalement. On sait que les dix premiers grammes se dissolvent en 5 minutes.

1. Donner l'expression de la quantité dissoute $f(t)$ (en grammes) en fonction du temps t (en minutes).

2. Quelle est la quantité (à 1mg près) non dissoute au bout de 10minutes ? 30minutes ? 1heure ?

6 On désigne par $C(t)$ la concentration (en mg/l) d'un certain médicament dans le sang, en fonction du temps exprimé en heures. La concentration initiale est de 5 mg/l.

On suppose que la vitesse instantanée d'élimination de ce médicament par l'organisme est donnée par $C'(t)=-0.25\,C(t)$.

1. Déterminer $C(t)$.

2. Représenter la fonction $C:t\mapsto C(t)$.

3. Donner un encadrement à 0.1 près de l'instant t_0 à partir duquel $C(t)<1$.

7 La charge et la décharge d'un condensateur sont définies sur l'intervalle $[0,2\ln 3[$ par la fonction f qui vérifie les conditions suivantes :

- Sur l'intervalle $[0,2\ln 3[$, f est une solution de l'équation différentielle $y'+y=0$ avec $f(\ln 3)=-2$.

1. Exprimer $f(x)$ en fonction de x.

2. Etudier f et la représenter.

8 1. Vérifier que la fonction $u:x\mapsto 2$ vérifie l'équation différentielle $y'+2y=y^2$.

1. Soit E l'ensemble des fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}$, qui ne s'annulent pas sur $\mathbb{R}$, telles que $f'(x)+2f(x)=(f(x))^2$ pour tout réel x.

a. Vérifier que l'ensemble E est non vide.

b. Soit f une fonction de E.

Montrer que la fonction $g=\frac{1}{f}$ est une solution d'une équation différentielle de la forme $y'=ay+b$, où a et b sont deux réels.

c. Déterminer alors E.

9 Dans une culture de microbes, le nombre de microbes à un instant t, exprimé en heures, peut être considéré comme une fonction y à valeurs réelles de la variable t.
La vitesse de prolifération à l'instant t du nombre de microbes est la dérivée y' de cette fonction.
On a constaté que : $y'(t)=ky(t)$ où k est un coefficient réel strictement positif.
On désigne par N le nombre de microbes à l'instant $t=0$.
1. Déterminer l'unique solution de l'équation différentielle $y'=ky$ telle que $y(0)=N$.
2. Sachant qu'au bout de deux heures, le nombre de microbes a quadruplé, calculer en fonction de N, le nombre de microbes au bout de trois heures.
3. Quelle est la valeur de N sachant que la culture contient 6400 microbes au bout de cinq heures ?

11 Soit l'équation différentielle $(E): y'+2y=x^2$.
1. Déterminer les solutions de l'équation différentielle $(E_0): y'+2y=0$.
2. Déterminer un trinôme du second degré qui vérifie (E).
3. Montrer qu'une fonction f est solution de (E), si et seulement si, $f-g$ est une solution de (E_0).
4. En déduire les solutions de l'équation différentielle (E).

12 Soit l'équation différentielle
$(E): y'-y=4\cos x$.
1. Déterminer les solutions de l'équation différentielle $(E_0): y'-y=0$.
2. Déterminer les nombres a et b tels que la fonction g, définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=a\cos x+b\sin x$, vérifie (E).
3. Montrer qu'une fonction f est solution de (E), si et seulement si, $f-g$ est une solution de (E_0).
4. En déduire les solutions de l'équation différentielle (E).

13 Dans un circuit contenant un générateur de force électromotrice E ainsi qu'une bobine de résistance r (en ohms) et d'inductance (en henrys), on montre que l'intensité est une fonction du temps solution de l'équation différentielle $Ly'+ry=E$.
On prend $E=10v$, $r=100\Omega$ et $L=0.2H$.
A l'instant 0, l'intensité est nulle dans le circuit.
1. Déterminer la fonction $i: t\mapsto i(t)$ décrivant l'évolution de l'intensité i en fonction du temps.
2. Déterminer la limite de i quand t tend vers $+\infty$ et interpréter ce résultat.

14 Pour chacun des cas ci-dessous, donner la solution f sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle.
1. $y''+2y=0$, $y(0)=1$ et $y'(0)=\sqrt{2}$.
2. $y''+16y=0$, $y(\pi)=-1$ et $y'(\pi)=-2$.
3. $y''+\frac{y}{4}=0$, $y(-\pi)=1$ et $y'(-\pi)=0$.

15 On désigne par (E) l'équation différentielle $y''=2y'$.
1. En posant $z=y'$, résoudre (E) sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer la solution f de (E) vérifiant $f'(0)=1$ et $f(0)=2$.

16 On désigne par (E) l'équation différentielle $y''=-3y'+1$.
1. En posant $z=y'$, résoudre (E) sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer la solution f de (E) vérifiant $f'(0)=0$ et $f(0)=0$.

17 1. Résoudre l'équation différentielle $y''+16y=0$.
2. Trouver la solution f de cette équation vérifiant $f(0)=1$ et $f'(0)=4$.
3. Trouver deux réels positifs a et b tels que pour tout réel t, $f(t)=\sqrt{2}\cos(at-b)$.
4. Calculer la valeur moyenne de f sur l'intervalle $[0, \frac{\pi}{8}]$.

18 1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $y''+y'=0$.
2. En déduire les solutions de l'équation différentielle $y'''+y''=0$.

20 Soit l'équation différentielle $4y''+\pi^2y=0$

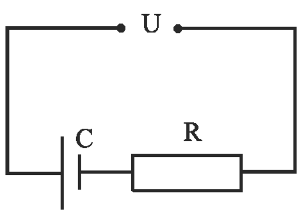
1. Résoudre cette équation différentielle.
2. Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

Déterminer la fonction g solution de cette équation différentielle, qui satisfait aux conditions ci-dessous.
- La courbe représentative de g passe par le point N de coordonnées $\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.
- La tangente à cette courbe en N est parallèle à l'axe des abscisses.

3. Vérifier que pour tout réel x,
$g(x)=\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}x-\frac{\pi}{4}\right)$.

21 On considère le circuit électrique ci-dessous où C est la capacité du condensateur, R la valeur de la résistance et U désigne la tension aux bornes du circuit.

En physique, on montre que $Rq'(t)+\frac{1}{C}q(t)=U$ où q, la charge du condensateur, est une fonction du temps qui prend la valeur 0 pour $t=0$.



1. Ecrire l'équation différentielle vérifiée par q.
2. Montrer que $q(t)=CU-CUe^{-\frac{t}{RC}}$
3. Sachant que l'intensité $i(t)=q'(t)$, déterminer $i(t)$.

22 On se propose de déterminer les fonctions f continues sur $\mathbb{R}$ et vérifiant l'équation

(E): Pour tout réel x, $f(x)=\int_0^x f(t)dt+x$.

1. Montrer que si une fonction f vérifie l'équation (E), alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que toute solution de (E) est solution de l'équation différentielle $(E'): y'=y+1$.
Réciproquement ,quelle condition doit vérifier une solution de (E') pour être une solution de (E) ?
3. Résoudre (E).

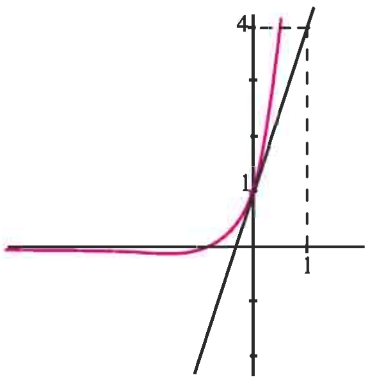
23 **(La piqûre intraveineuse)**

A l'instant $t=0$ (t est exprimé en heures), on injecte dans le sang par piqûre intraveineuse une dose de 1.8 unité d'une substance médicamenteuse.
On suppose que la substance se répartit instantanément dans le sang et qu'elle est ensuite progressivement éliminée.
On note $Q(t)$ la quantité de substance présente dans le sang à l'instant t, exprimée en unités adaptées.
On admet que le processus d'élimination se modélise par l'équation différentielle $Q'(t)=-\alpha Q(t)$ où α est un nombre qui sera déterminé expérimentalement.

1. Montrer que $Q(t)=1.8e^{-\alpha t}$.
Sachant qu'au bout d'une heure, la quantité de substance présente dans le sang a diminué de 30 %, en déduire une équation vérifiée par α.
En utilisant la fonction $x\mapsto e^{-x}$, montrer qu'il existe un réel α unique tel que $e^{-\alpha}=0.7$
Donner une valeur décimale approchée de α à 10^{-4} près.
2. Etudier le sens de variation de Q pour $t\geq 0$, déterminer sa limite en $+\infty$ et tracer la courbe représentative C de Q.
3. On décide de réinjecter une dose analogue à l'instant $t=1$ (au bout d'une heure), puis aux instants $t=2$, $t=3$, etc.
On note R_n la quantité de substance présente dans le sang à l'instant $t=n$, dès que la nouvelle injection est faite.
a. Montrer que $R_1=1.8+0.7\times 1.8$.
b. Montrer que $R_2=1.8+0.7\times R_1$ et calculer R_2.
c. Exprimer R_{n+1} en fonction de R_n.
d. Montrer que pour tout entier naturel n,
$R_n=6\left(1-(0.7)^{n+1}\right)$.
e. Déterminer la limite de R_n quand n tend vers l'infini.

24 On considère les deux équations différentielles $(I): y' = 2y$ et $(II): y' = y$.

1. Résoudre chacune de ces équations différentielles.
2. Le graphique ci-dessous représente une partie de la courbe C d'une fonction f et d'une de ses tangentes T, dans un repère orthonormé.
Cette fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = f_1(x) - f_2(x)$, où f_1 est une solution de l'équation (I) et f_2 une solution de l'équation (II).



2.a. A partir des données lues sur le graphique, donner $f(0)$ et $f'(0)$.
b. Déterminer les fonctions f_1 et f_2.
En déduire que, pour tout réel x, $f(x) = 2e^{2x} - e^{x}$.
c. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
d. Déterminer l'abscisse du point d'intersection de la courbe C avec l'axe des abscisses.
3. Soit un réel $t < -\ln 2$.
a. Exprimer à l'aide de t, l'aire $\mathcal{A}(t)$ du domaine du plan limité par C, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = t$ et $x = -\ln 2$.
b. Montrer que $\lim\limits_{t \to -\infty} \mathcal{A}(t) = \int_{-\ln 2}^{0} f(t)dt$.
Interpréter graphiquement.

25 1. a. Résoudre l'équation différentielle $(E): 4y' + 3y = 0$.
b. Déterminer la fonction f, solution de (E) telle que $f'(0) = -6$.
2. Soit g la fonction numérique de la variable réelle x définie sur l'intervalle $I = [0,4]$ par $g(x) = 8e^{-0.75x}$.
a. Etudier les variations de g sur I et tracer sa courbe représentative (C) dans le plan rapporté à un repère orthonormé.
b. Soit A le domaine plan compris entre la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 4$.
Calculer le volume V du solide engendré par la rotation du domaine A autour de l'axe des abscisses.
On donnera la valeur exacte de V en cm^3 puis sa valeur approchée arrondie au mm^3.

26 La masse de sel (en grammes) que contient un mélange d'eau et de sel à l'instant t (en minutes) est notée m(t).
Soit m la fonction qui à tout instant t associe le réel m(t). Nous admettons que la fonction m vérifie les conditions ci-dessous.
$m(0) = 300$, m est solution sur $[0,+\infty[$ de l'équation différentielle $(E): 5y' + y = 0$.
1.a. Résoudre l'équation différentielle (E).
b. Montrer que pour tout t de $[0,+\infty[$, $m(t) = 300e^{-0.2t}$.
2. Déterminer le réel t_0 tel que $m(t_0) = 150$.
3. Nous admettrons qu'il est impossible de détecter la présence de sel à l'instant t, si et seulement si, $m(t) \leq 10^{-2}$.
A partir de quel instant est-il impossible de détecter la présence de sel ?

27 Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \cos x - \sin x$.
1. Montrer que pour tout réel x, $g'(x) = g(\pi - x)$.
2. On se propose de déterminer toutes les fonctions f définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ vérifiant pour tout x réel, $f'(x) = f(\pi - x)$.
a. Montrer que f est deux fois dérivable et que f est solution de l équation différentielle $y'' + y = 0$.
b. Déterminer les fonctions f.

28 A/ On se propose de résoudre l'équation différentielle $(E): y' - 2y = -\frac{2}{1+e^{-2x}}$.

1. Déterminer la solution de l'équation $y' - 2y = 0$ qui prend la valeur 1 en 0.
2. soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, telle que $f(0) = \ln 2$, et soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{2x} g(x)$.

a. Calculer $g(0)$.

b. Calculer $f'(x)$ en fonction de $g'(x)$ et de $g(x)$.

c. Montrer que f est une solution de (E), si et seulement si, $g'(x) = \frac{-2e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$.

d. En déduire l'expression de $g(x)$, puis celle de $f(x)$ de telle sorte que f soit solution de (E).

B/ Etude de la fonction f définie par $f(x) = e^{2x} \ln\left(1+e^{-2x}\right)$.

1. On pose $h(x) = \ln\left(1+e^{-2x}\right) - \frac{1}{e^{2x}+1}$.

a. Etudier la limite de h en $+\infty$.

b. Etudier le sens de variation de h.

c. En déduire le signe de $h(x)$, pour tout réel x.

2. Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x)$ est du signe de $h(x)$.
3. Etudier la limite de f en $+\infty$.

Montrer que $f(x) = e^{2x}\left[-2x + \ln\left(1+e^{2x}\right)\right]$.

En déduire la limite de f en $-\infty$.

4. Dresser le tableau de variation de f.
5. Représenter graphiquement la fonction f dans un repère orthonormé en prenant 5 cm pour unité.

Préciser la tangente au point d'abscisse nulle.

C/ 1. En remarquant que $\frac{1}{1+e^{-2x}} = \frac{e^{2x}}{1+e^{2x}}$, déterminer une primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{1+e^{-2x}}$.

2. Calculer, à l'aide d'une intégration par parties, l'aire $\left(\text{en}\,\text{cm}^2\right)$ du domaine du plan limité par l'axe des abscisses, la courbe représentative de la fonction f définie au B/ et les droites d'équations $x = -1$ et $x = 0$.

On donnera la valeur exacte de cette aire ainsi qu'une valeur approchée à 10^{-3} près.

D/ On définit la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que $f([0,1]) \subset [0,1]$ et en déduire que pour tout $n \geq 0$, $u_n \in [0,1]$.
2. Montrer par récurrence que la suite (u_n) est croissante.

En déduire qu'elle converge vers un réel α.

3. Vérifier que $f(\alpha) = \alpha$ et $0 < \alpha < 1$.
4. Utiliser le graphique de f, pour donner une valeur approchée de α à 10^{-1} près.

29 Un corps dont la température initiale θ_0 est égale à $30\ °C$, est placé dans une ambiance dont la température T est constante.

La température de ce corps est une fonction du temps $\theta : t \mapsto \theta(t)$.

Une loi de physique (Newton) énonce que la dérivée de θ est proportionnelle à la différence entre la température ambiante et la température du corps.

On a donc $\theta'(t) = k\left[T - \theta(t)\right]$ où k est le coefficient de proportionnalité fixé par la nature, la forme, la taille, etc. du corps.

On prend $k = 0.1$ et $\theta_0 = 30\ °C$, la température pour $t = 0$.

Le temps est exprimé en minutes, les températures en degrés Celsius.

1. Exprimer cette loi à l'aide d'une équation différentielle en précisant les conditions initiales.
2. Dans cette question, T, la température ambiante, est $100\ °C$.

a. Déterminer θ, la solution de cette équation différentielle.

b. Calculer la limite de θ quand t tend vers $+\infty$ et interpréter ce résultat.

3. Représenter les courbes d'évolution de la température en fonction du temps pour $T = 100\ °C$, $T = 30\ °C$ et $T = -10\ °C$.

30 Un fil conducteur parcouru par un courant électrique d'intensité constante s'échauffe par effet Joule et sa température, en degrés Celsius, est une fonction θ du temps t exprimé en secondes .On choisit l'instant de mise sous tension comme origine des temps $(t=0)$ et, à cet instant, la température du conducteur est égale à $0\ °C$.

Dans les conditions de l'expérience, la fonction θ vérifie $\theta'(t)+0.1\theta(t)=2$.

1. Déterminer $\theta(t)$, $t\in\mathbb{R}_+$.
2. a. Quelle température atteint le conducteur au bout de dix secondes, au bout d'une minute ?
b. Calculer la limite de $\theta(t)$ quand t tend vers $+\infty$ et interpréter cette limite.

31 A/ On considère la fonction f définie par

$f(x)=\dfrac{3e^{\frac{x}{5}}}{e^{\frac{x}{5}}+2}$ et (C) sa courbe représentative dans un plan muni d'un repère orthogonal. (L'unité graphique étant 1cm sur l'axe des abscisses et 5cm sur l'axe des ordonnées).

1. Etudier les variations de la fonction f et préciser les asymptotes de (C).
2. Donner l'équation de la tangente T à (C) au point d'abscisse 0.
3. Tracer (C), la tangente et les asymptotes.
4. a. Trouver la primitive de f qui s'annule en 0.
b. Calculer le nombre qui mesure (en unités d'aire) l'aire de la partie du plan limitée par l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées, la courbe (C) et la droite d'équation $x=5$.

B/ 1. Une population de poissons d'une certaine espèce croît au cours des ans selon la loi $g'=\frac{g}{5}$ (I), où g désigne la quantité de poissons (exprimée en milliers) dépendant du temps t (exprimé en années).
a. Résoudre l'équation différentielle (I).
b. Sachant qu'à l'instant $t=0$, la population comprend un millier de poissons, trouver l'expression ?
2. En réalité, un prédateur de cette espèce empêche une telle croissance, tuant chaque année une certaine quantité de poissons (dépend de l'effectif total).

La population suit alors la loi : $g'=\frac{g}{5}-\frac{g^2}{15}$ (II).

a. On pose $h=\dfrac{g}{3-g}$ et on suppose que pour tout t on a $g(t)\neq 3$.
Montrer que g est solution de (II), si et seulement si, h est solution de (I).
b. Trouver les fonctions h solutions de (I), puis les fonctions g solutions de (II).
c. Trouver la fonction g solution de (II) telle que $g(0)=1$.
Montrer que cette fonction coïncide avec la fonction f étudiée dans la partie A.
d. Vers quelle limite tend la population de poissons ?

32 On considère un circuit électrique fermé comprenant un condensateur dont la capacité, exprimée en farads, a pour valeur C, une bobine dont l'inductance, exprimée en henrys, a pour valeur L et un interrupteur.
Le temps t est exprimé en secondes.
A l'instant $t=0$, on suppose le condensateur chargé. On ferme l'interrupteur et le condensateur se décharge dans le circuit.
On appelle $q(t)$ (en Coulombs) la valeur de la charge du condensateur à l'instant t.
La fonction q est deux fois dérivable sur $[0,+\infty[$.
On admet que la fonction q est solution de l'équation différentielle $(E): y''+\dfrac{1}{LC}y=0.$

Dans tout l'exercice on prend $C=1.25\times10^{-3}$ et $L=0,5\times10^{-2}$.

1. Résoudre l'équation différentielle (E).
2. Déterminer la solution q de (E) vérifiant $q(0)=6\times10^{-3}$ et $q'(0)=0.$
3. On sait que la valeur $i(t)$ de l'intensité, exprimée en ampères, du courant qui parcourt le circuit à l'instant t vérifie $i(t)=-q'(t)$.
On définit ainsi une fonction i sur l'intervalle $[0,+\infty[$.

a. Vérifier que, pour tout t de $[0,+\infty[$,
$i(t)=2.4\sin(400t)$.

b. Calculer $\frac{400}{\pi}\int_{0}^{\frac{\pi}{400}}\cos(800t)\,dt$.

c. On désigne par I_e la valeur (positive), exprimée en ampères, de l'intensité efficace dans le circuit.
Son carré est donné par la formule

$$(I_e)^2=\frac{400}{\pi}\int_{0}^{\frac{\pi}{400}}i^2(t)\,dt.$$

Calculer $(I_e)^2$, puis donner une valeur approchée de I_e à 10^{-3} près.